El Teorema de Consistencia de Kolmogorov en la Construcción de Procesos Estocásticos Cuánticos

Tesis que presenta:

Neptali Acevedo Martínez

del

Departamento de Matemáticas

en cumplimiento parcial con los requisitos

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

en el área de

Matemáticas

Universidad Autónoma Metropolitana

Iztapalapa

Asesor: Dr. Julio César García Corte

Junio 2011

Agradecimientos

Dedicado a B.B.O. por acompañarme en este viaje,
y darme fuerzas en los momentos de flaqueza.

Para quien dejo de existir R.A.M.

Quiero dar un especial agradecimiento a mi asesor el Dr. Julio César García Corte por el apoyo dado para terminar este trabajo, también por su paciencia durante este tiempo que fue muy necesaria.

A mis sinodales ,el Dr. Luis Rincón Solís y el Dr. Alberto Contreras Cristán por su tiempo y amabilidad para la revisión de este trabajo.

A mis padres, Zoila M. C. y Juan A. G., mi familia, Esau A. M., Karla A. M., Margarita O. Ch., Ricardo B. L.,Ricardo B.O., por su apoyo y cariño.

A mis amigos.

A CONACYT por la beca proporcionada para realizar mis estudios de maestría.

Índice general

Introducción

De acuerdo con Parthasarathy [12], la fuente de inspiración para crear “Probabilidad Cuántica”, radica en los métodos ingeniosos adoptados por los físicos para calcular probabilidades de eventos relacionados con el mundo subatómico de partículas elementales donde las leyes de la mecánica clásica no se cumplen y la distinción entre una partícula y una onda llega a ser vaga. Por lo que nos preguntamos ¿cómo es que se sustenta matemáticamente estos métodos para calcular probabilidades?

En el Primer Congreso Internacional de Matemáticas, realizado en Paris en 1900, David Hilbert planteó 23 problemas que definiría la investigación en las matemáticas. Entre esos problemas, el sexto, solicitaba encontrar una base axiomática que permitiese deducir todas las teorías físicas y los fenómenos aleatorios o dependientes del azar. Muchos matemáticos destacados dedicaron su vida a responder a ese problema. Entre otros, Kolmogorov y Von Neumann.

L. Accardi [1] menciona que los primeros libros que describen el aparato matemático de la mecánica cuántica, fueron las monografías de Dirac [6] y de Weyl [20]. Estos libros tuvieron gran influencia en el desarrollo de la teoría cuántica, pero no trataron directamente el sexto problema de Hilbert. Dirac hace una pequeña mención de los problemas de interpretación de la nueva teoría sólo en la introducción del libro, mientras que Weyl no menciona nada al respecto y solo se centra en la matemáticas de la nueva teoría.

Rolando Rebolledo [13] menciona que el sexto problema de Hilbert, carece de sentido en la forma en que fue formulado. Plantear la búsqueda de una axiomatización completa de la Física y de los fenómenos del azar, corresponde a una visión estática de la ciencia, que suprime la Historia y la capacidad transformadora de nuestra especie.

¿Se le puede dar, a pesar de todo, algún sentido a este problema, que tenga en cuenta la dinámica del conocimiento humano?

Eso es diferente y se puede responder afirmativamente. Hoy es posible proveer una estructura matemática para modelar el conjunto de las teorías físicas y los fenómenos del azar conocidos a principios del Siglo XX.

Como menciona Fagnola [9], en los comienzos de los años 30‘s A.N. Kolmogorov y J. von Neumann propusieron dos conjuntos de axiomas para la modelación de fenómenos aleatorios. En los modelos clásicos (Kolmogorov), uno introduce una tripleta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, donde Ω es el conjunto de todos los posibles resultados del fenómeno aleatorio (espacio muestral), $\mathcal{F}$ es la sigma álgebra de subconjuntos de Ω, llamados eventos. $\mathbf{P}$ es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{F}$, que actualmente todo esta fundamentado en la Teoría de la Medida.
Por otro lado von Neumann (con la Teoría de operadores) propone para el caso cuántico, un par $(\mathcal{A}, \varphi)$ donde $\mathcal{A}$ es un álgebra de von Neumann (de operadores) donde las proyecciones son llamadas eventos y φ es un estado (probabilidad) sobre $\mathcal{A}$. El planteamiento original de von Neumann solo cubría algunas ideas fundamentales de lo que se podría llamarse “Teoría de la Medida no-conmutativa”, mas aun, la noción de variable aleatoria, proceso estocástico, probabilidad y esperanza condicional, cadenas de Markov y procesos de Markov estaban ausentes en este sistema.

A partir de la segunda mitad de los años 70‘s, la noción de “variable aleatoria” y “procesos estocástico” fueron definidos de manera puramente algebraica, además de una noción nada trivial de “ esperanza condicional cuántica ” lo cual permitió a L. Accardi la construcción del primer ejemplo de un “ Proceso de Markov Cuántico ” y el cual fue extendido a cualquier álgebra de von Neumann por L. Accardi y C. Cecchini [2].

A los comienzos de los 80's la noción de " Procesos Estocásticos Cuánticos" fue formulada como se conoce hasta ahora, generalmente aceptada, por L Accardi, A. Frigerio y J.T. Lewis [3].

Resumen

En este trabajo lo que se pretende es hacer notar la importancia del Teorema de Consistencia de Kolmogorov en la construcción de los procesos estocásticos tanto clásicos como cuánticos. En el primer capítulo damos las definiciones básicas de lo que es un álgebra, C^*-álgebra y una álgebra de von Neumann, un ejemplo muy sencillo de la analogía de cómo se mira un espacio de probabilidad clásico como cuántico. En el capítulo 2 vemos el Teorema de Kolmogorov y algunas de sus aplicaciones importantes para nuestro trabajo como lo es la construcción de los productos tensoriales de espacio de Hilbert, productos tensoriales estabilizados. En el siguiente capítulo vemos a más detalle la esperanza condicional cuántica sus propiedades, de acuerdo con Parthasarathy, y se define lo que es un proceso estocástico cuántico (o flujo estocástico, introducido por Parthasarathy [12]), donde damos ejemplos de cuatización de algunos procesos discretos clásicos como por ejemplo la cadena de *Ehrenfest*, cadena de *nacimiento-muerte* entre otros. Por último estudiamos parcialmente el articulo de L Accardi, A. Frigerio y J.T. Lewis [3], en donde una vez más hacemos el uso del Teorema de Kolmogorov para la demostración del Teorema de reconstrucción, que garantiza la existencia de procesos cuánticos.

Capítulo 1

Espacio Cuántico de Probabilidad

A fin de que este trabajo sea lo más autocontenido posible, en este primer capítulo se presentan algunas definiciones y teoremas básicos correspondientes a la teoría de $*$-álgebras, Teoría de operadores así como el lenguaje de la probabilidad clásica y cuántica. Nos basaremos en los libros de Franco Fagnola [9], pero especialmente en Parthasarathy [12].

1.1. Preliminares

Damos una breve introducción de la teoría de operadores por lo que no hacemos demostraciones estas se pueden encontrar en el libro de Parthasarathy [12] y en el libro de Weidmann [19].

Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, un subconjunto $S \subset \mathscr{H}$ es llamado *total* si el subespacio cerrado mas pequeño que contiene a S es $\mathscr{H}$, o equivalentemente, $S^{\perp} = \{0\}$.

Proposición 1.1.1. *Sean S_i subconjuntos totales de los espacios de Hilbert $\mathscr{H}_i, i = 1, 2$, respectivamente. Supóngase $U_0 : S_1 \to S_2$ es una transformación que preserva el producto interior, es decir para todo $u, v \in S_1$*

$$\langle U_0 u, U_0 v \rangle = \langle u, v \rangle. \tag{1.1}$$

Entonces existe una única isometría lineal $U : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ la cual extiende a U_0, es decir, $Uu = U_0 u$ para todo $u \in S_1$. Si, agregamos, U_0 es sobreyectiva entonces U es un isomorfismo unitario de $\mathscr{H}_1$ en $\mathscr{H}_2$.

Demostración: Para $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$, $u_i, v_j \in S_1$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. $\langle U_0 u, U_0 v \rangle = \langle u, v \rangle$ implica que

$$\begin{aligned} \langle \sum_i \alpha_i U_0 u_i, \sum_j \beta_j U_0 v_j \rangle &= \sum_{i,j} \bar{\alpha}_i \beta_j \langle u_i, v_j \rangle \\ &= \langle \sum_i \alpha_i u_i, \sum_j \beta_j v_j \rangle. \end{aligned} \tag{1.2}$$

en particular se tiene que

$$\| \sum_i \alpha_i U_0 u_i \|^2 = \| \sum_i \alpha_i u_i \|^2. \tag{1.3}$$

Se define $U_1 \sum_i \alpha_i u_i = \sum_i \alpha_i U_0 u_i$.
Si $\sum_i \alpha_i u_i = \sum_j \beta_j v_j$, entonces (1.3) implica que $\| \sum_i \alpha_i U_0 u_i - \sum_j \beta_j U_0 v_j \| = 0$ así U_1 esta bien definido sobre el espacio lineal M_1 generado por S_1. (1.2) implica que U_1 es una isometría lineal sobre M_1 y en particular es acotado. Por continuidad, U_1 se extiende a una isometría lineal U sobre la cerradura de M_1, es decir, $\overline{M}_1 = \mathscr{H}_1$. Si V es otro de tal extensión, entonces $U - V$ es un operador acotado que se anula sobre el conjunto total S_1 y por lo tanto $U - V = 0$. El rango de de la isometría U es un subespacio cerrado que contiene a la imagen de S_1. Si U_0 es suprayectiva, entonces $R(U) = \mathscr{H}_2$ y U es unitaria.

$\square$

Definición 1.1.2. Sea $B(\mathscr{H})$ el conjunto de todos los operadores acotados y $\mathbb{1}$ la función identidad. El *conjunto resolvente*, $r_{B(\mathscr{H})}(T)$ de un elemento $T \in B(\mathscr{H})$ se define como el conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda\mathbb{1} - T$ es invertible y el *espectro* $\sigma_{B(\mathscr{H})}(T)$ de T se define como el complemento de $r_{B(\mathscr{H})}(T)$ en $\mathbb{C}$.

Un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ se llama un *eigen-valor* de T si existe un vector $v \in \mathscr{H}$ distinto de cero tal que $Tv = \lambda v$.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un eigen-valor de T, entonces los vectores distintos de cero del Kernel de $\lambda\mathbb{1} - T$ son los *eigen-vectores* de T.

Sean S_1, S_2 dos subespacios cerrados de $\mathscr{H}$ y $U : S_1 \to S_2$ es un isomorfismo unitario de S_1 sobre S_2. Entonces U es llamado *isometría parcial* con espacio inicial S_1 y rango S_2.
Para cualquier operador acotado $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, el operador positivo $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$ es llamado el *modulo* de T y se denota por $|T|$.

Teorema 1.1.3. *(Descomposición Polar) Sea $T \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$, entonces existe una unica isometría parcial U tal que:*

i) U tiene como espacio inicial a $\overline{R(|T|)}$ y rango $\overline{R(T)}$.

ii) $T = U|T|$.

Un elemento $T \in B(\mathscr{H})$ se llama *operador de rango finito n* si dim $(T) = n < \infty$. Se denota por $L_0(\mathscr{H})$ al conjunto de todos los operadores de rango finito.

Un elemento $T \in B(\mathscr{H})$ se llama *operador compacto* si cada sucesión $\{u_n\}$ de vectores unitarios en $\mathscr{H}$ la sucesión imagen $\{Tu_n\}$ tiene una subsucesión convergente. Se denota por $L_\infty(\mathscr{H})$ al conjunto de todos los operadores compactos de $\mathscr{H}$.

Proposición 1.1.4. *i) $L_0(\mathscr{H}) \subset L_\infty(\mathscr{H}) \subset B(\mathscr{H})$.*

ii) $L_0(\mathscr{H})$ y $L_\infty(\mathscr{H})$ son ideales $*$-cerrados por ambos lados en $B(\mathscr{H})$.

iii) $L_\infty(\mathscr{H})$ es cerrado bajo la topología de la norma y $L_0(\mathscr{H})$ es denso en $L_\infty(\mathscr{H})$.

iv) *$T \in L_0(\mathscr{H})$ si y sólo si existe un conjunto ortonormal finito $\{u_j\}, \{v_j\}$ y de escalares positivos $\{s_j\}$, con $j = 1, 2, \ldots$ tal que*

$$T = \sum_{j=1}^{n} s_j |u_j\rangle\langle v_j|$$

v) *Si $\{s_j\}$ es una sucesión no creciente de escalares positivos tal que $s_j \to 0$ cuando $j \to \infty$ y $\{u_j\}, \{v_j\}$ son sucesiones ortonormales entonces*

$$T = \sum_{j} s_j |u_j\rangle\langle v_j|$$

es un operador compacto y la suma del lado derecho converge en la norma de los operadores. La descomposición polar de $T = U\|T\|$ esta determinada por

$$\|T\| = \sum_{j} s_j |v_j\rangle\langle v_j|$$

$$Uv_j = u_j, \; j = 1, 2, \ldots.$$

vi) *Un operador auto-adjunto T es compacto si y sólo si existe una sucesión ortonormal $\{u_j\}$ y escalares distintos de cero $\{\lambda_j\}$ tal que $\lambda_j \to 0$ cuando $j \to \infty$ cuando la sucesión es infinita y $T = \sum \lambda_j |\langle\rangle|$. en tal caso la serie infinita del lado derecho converge en norma.*

Proposición 1.1.5. *(Pricipio MiniMax) Sea $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ una enumeración, inclusive con multiplicidad, de todos los eigen-valores positivos de un operador positivo compacto T, entonces*

$$\lambda_n = \min_{dimS=n-1} \max_{\substack{\|u\|=1 \\ u \in S^\perp}} \langle u, Tu\rangle, \; n = 1, 2, \ldots$$

donde S denota cualquier subespacio de $\mathscr{H}$.

Proposición 1.1.6. *Sea T un operador compacto sobre $\mathscr{H}$. Sea $s_1(T) \geq s_2 \geq \cdots$ una enumeración completa, inclusive de multiplicidad, de los eigen-valores de $|T|$, entonces*

$$s_n(T) = \min_{dimS=n-1} \max_{\substack{\|u\|=1 \\ u \in S^\perp}} \|Tu\|, \; n = 1, 2, \ldots$$

donde S es un subespacio de $\mathscr{H}$.

La sucesión $\{s_n(T)\}$ (la cual es vacía cuando $T = 0$ y finita o infinita de acuerdo con que si el rango de T es finito o infinito) de arriba es llamada la sucesión de *valores singulares* de T(eigen-valores de $|T|$). Si la sucesión es infinita, por ser T compacto se tiene que $s_n(T)$ decrece a 0 cuando $n \to \infty$.

Proposición 1.1.7. *Sea un operador compacto sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ con valores singulares $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \cdots$ y sea $T = U|T|$ su descomposición polar. Supóngase que $\{u_j\}$, $\{v_j\}$ son dos sucesiones ortonormales tal que $|T|u_j = s_j(T)u_j$, $Uu_j = v_j$ con $j = 1, 2, \ldots$. Entonces*

$$T = \sum_j s_j(T)|v_j\rangle\langle u_j|$$

donde el lado derecho converge en norma. En particular, cada operador compacto es el límite norma de una sucesión de operadores de rango finito.

Corolario 1.1.8. *Sea T como en la Proposición (1.1.7), entonces T^* es un operador compacto y*

$$T^* = \sum_j s_j(T)|u_j\rangle\langle v_j|, \;\; s_j(T^*) = s_j(T), \;\; j = 1, 2, \ldots$$

donde $\{u_j\}$ y $\{v_j\}$ son sucesiones ortonormales como en la Proposición (1.1.7)

Proposición 1.1.9. *Para cualquier operador $T \in L_\infty(\mathscr{H})$, $X \in B(\mathscr{H})$ se cumplen:*

i) $s_i(XT) \leq \|X\| s_j(T)$

ii) $s_j(TX) \leq \|X\| s_j(T)$.

Definición 1.1.10. Un operador $T \in L_\infty(\mathscr{H})$ se llama de *traza finita* si

$$\|T\|_1 = \sum_j s_j(T) < \infty.$$

Se denota por $L_1(\mathscr{H})$ al conjunto de todos los operadores de traza finita en $\mathscr{H}$.

Proposición 1.1.11. *Para cualquier $T \in L_1(\mathscr{H})$, $X \in B(\mathscr{H})$ se cumple:*

i) $\|T\|_1 = \|T\|_1$

ii) $\|TX\|_1 \leq \|X\|\|T\|_1$

iii) $\|XT\|_1 \leq \|X\|\|T\|_1$

Proposición 1.1.12. *Sea $T \in L_1(\mathscr{H})$. Para cualquier base ortonormal $\{e_j\}$ en $\mathscr{H}$ la serie $\sum_j \langle e_j, Te_j\rangle$ converge absolutamente a un limite independiente de la base.*

Proposición 1.1.13. *$L_1(\mathscr{H})$ es un espacio lineal.*

Proposición 1.1.14. *La transformación $T \to \mathbf{tr}(T)$ sobre $L_1(\mathscr{H})$ satisface lo siguiente:*

i) $\mathbf{tr}T^* = \overline{\mathbf{tr}T}$

ii) $\mathbf{tr}TX = \mathbf{tr}XT$

iii) $\sup\limits_{\substack{\|X\|=1 \\ X \in B(\mathscr{H})}} \|\mathbf{tr}TX\| = \|T\|_1$

Proposición 1.1.15. *$L_1(\mathscr{H})$ es un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_1$.*

Proposición 1.1.16. *Sea T un operador positivo y $\{e_j\}$ una base ortonormal en $\mathscr{H}$ tal que $\sum_j \langle e_j, Te_j\rangle < \infty$, entonces $T \in L_1(\mathscr{H})$ y $\mathbf{tr}T = \sum_j \langle e_j, Te_j\rangle$.*

Proposición 1.1.17. *Sea λ cualquier funcional lineal acotado sobre el espacio de Banach $L_\infty(\mathscr{H})$, entonces existe un único $T \in L_1(\mathscr{H})$ tal que $\lambda(X) = \mathbf{tr}TX$ para todo X. Además*

$$\sup_{\substack{\|X\|=1 \\ X\in L_\infty(\mathscr{H})}} \|\lambda(X)\| = \|T\|_1.$$

Inversamente, para cualquier $T \in L_1(\mathscr{H})$ la transformación $T \to \mathbf{tr}TX$ es un funcional lineal acotado sobre $L_\infty(\mathscr{H})$.

Proposición 1.1.18. *Sea λ cualquier funcional lineal acotado sobre el espacio de Banach $L_1(\mathscr{H})$ con la norma $\|\cdot\|_1$, entonces existe un único operador $X \in B(\mathscr{H})$ tal que $\lambda(T) = \mathbf{tr}TX$ para todo $T \in L_1(\mathscr{H})$ y $\|\lambda\| = \|X\|$. Inversamente, para cualquier $X \in B(\mathscr{H})$ la transformación $T \to \mathbf{tr}TX$ es un funcional acotado sobre $L_1(\mathscr{H})$.*

Teorema 1.1.19. *(Teorema de Schatten) Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo separable. Para cualquier operador T de traza finita y cualquier operador de acotado X en $B(\mathscr{H})$ sea $\langle T, X\rangle = \mathbf{tr}TX$. Entonces las siguientes condiciones se cumplen:*

(i) Baja la norma $\|T\|_1 = \mathbf{tr}|T|$ el conjunto de todos los operadores de traza finita $L_1(\mathscr{H})$ es isométricamente isomorfo al dual del espacio de Banach $L_\infty(\mathscr{H})$, el espacio de operadores compactos en $\mathscr{H}$, con la norma de los operadores y bajo la asociación $T \to \langle T, \cdot\rangle|_{L_\infty(\mathscr{H})}, T \in L_1(\mathscr{H})$;

(ii) El espacio de Banach $B(\mathscr{H})$, de todos los operadores acotados en $\mathscr{H}$, con la norma operador es isométricamente isomorfo al dual de $L_1(\mathscr{H})$ con la norma $\|\cdot\|_1$ bajo la asociación $X \to \langle\cdot, X\rangle|_{L_1(\mathscr{H})}, X \in B(\mathscr{H})$.

1.2. C^*-álgebras y W^*-álgebras

Daremos algunas definiciones de la teoría de álgebras basadas en el libro de Dixmier [7].

Definición 1.2.1. Un *álgebra* $\mathcal{A}$ sobre un campo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{K}$ tal que para cada par ordenado de elementos $x, y \in \mathcal{A}$ esta definido un tercer elemento en $\mathcal{A}$, llamado su producto, y es denotado por xy, con la propiedades siguientes:

1. $(xy)z = x(yz)$
2. $x(y+z) = xy + xz$
3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

Se dice que $\mathcal{A}$ es *conmutativa* si para todo $x, y \in \mathcal{A}$ se tiene que $xy = yx$. Además si $\mathcal{A}$ contiene un elemento e tal que para todo $x \in \mathcal{A}$, $ex = xe = x$, entonces a $\mathcal{A}$ se le llama *álgebra con unidad*.

Definición 1.2.2.

- Un *álgebra normada* $\mathcal{A}$ es un espacio normado que es un álgebra tal que para todo $x, y \in \mathcal{A}$
$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$
y si $\mathcal{A}$ tiene identidad e, entonces $\|e\| = 1$.
- Un *álgebra de Banach* es un álgebra normada que es completa considerada como espacio normado.

Ejemplo 1.2.3.

1. *La recta real* $\mathbb{R}$ *y el plano complejo* $\mathbb{C}$ *son algebras conmutativas de Banach con identidad,* $e = 1$.
2. *El espacio* $C[a, b]$ *es un álgebra de Banach conmutativa con identidad, el producto* xy *esta definido usualmente por*
$$(xy)(t) = x(t) \cdot y(t)$$
con $t \in [a, b]$ *y* $\|x\| = \max |x(t)|$.
3. *El espacio,* $M_{n\times n}(\mathbb{C})$*, de la matrices de* $n \times n$ *con coeficientes en* $\mathbb{C}$*, es un álgebra con el producto usual de multiplicación de matrices.*

Definición 1.2.4. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre $\mathbb{C}$, una *involución* en $\mathcal{A}$ es una transformación $x \to x^*$ de $\mathcal{A}$ en si mismo tal que, para todo elemento $x, y \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que:

i) $(x^*)^* = x$

ii) $(x + y)^* = x^* + y^*$

iii) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$

iv) $(xy)^* = y^* x^*$

Un álgebra sobre $\mathbb{C}$ dotada con una involución se le llama *álgebra involutiva*, a x^* se le llama el *adjunto* de x.

Un subconjunto de $\mathcal{A}$ el cual es cerrado bajo la operación involución es llamado *auto-adjunto*. La propiedad $i)$ de arriba implica que la involución en $\mathcal{A}$ es necesariamente una biyección de $\mathcal{A}$ en si mismo.

Definición 1.2.5. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra involutiva. Un elemento $x \in \mathcal{A}$ se dice que es *Hermitiano ó autoadjunto* si $x^* = x$ y *normal* si $xx^* = x^*x$. Un elemento hermitiano idempotente es llamado una *proyección*.

Cada elemento hermitiano es normal y el conjunto de los elementos hermitianos forma un subespacio vectorial real de $\mathcal{A}$ denotado por $\mathcal{A}_h$. Si x y y son hermitianos se tiene $(xy)^* = y^*x^* = yx$.
Así xy es hermitiano si y solo si x y y conmutan. Para cada $x \in \mathcal{A}$, xx^* y x^*x son hermitianos.

Un elemento a de $\mathcal{A}$ se le llama *positivo* si es de la forma $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i^* b_i$ con algún $n \in \mathbb{N}, b_i \in \mathcal{A}, \alpha_i \geq 0$.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra involutiva. Si f es un funcional lineal sobre $\mathcal{A}$, el funcional f^* sobre $\mathcal{A}$ dado por $x \to \overline{f(x^*)}$, llamado el *adjunto* de f, también es un funcional lineal. Se le llama a f *hermitiano* si $f = f^*$.
Un funcional lineal f sobre $\mathcal{A}$ es hermitiano si y sólo si f toma valores reales sobre el conjunto $\mathcal{A}_h$ de elementos hermitianos de $\mathcal{A}$.

Definición 1.2.6. Un *álgebra involutiva normada* es un álgebra normada $\mathcal{A}$ junto con la involución $x \mapsto x^*$ tal que $||x^*|| = ||x||$, para cada $x \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ es álgebra de Banach a $\mathcal{A}$ se le llama un *álgebra de Banach involutiva*.

Sea $\mathcal{A}$ una álgebra involutiva normada. Si f es una forma lineal continua sobre $\mathcal{A}$, entonces f^* es también continua y $\|f^*\| = \|f\|$ lo que implica que la bola unitaria de $\mathcal{A}$ es auto-adjunto.
Sea f una forma lineal hermitiana continua sobre $\mathcal{A}$ y sea $g = f|_{\mathcal{A}_h}$, entonces $\|f\| = \|g\|$; en efecto, es claro que $\|f\| \geq \|g\|$; por otro lado para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in \mathcal{A}$ tal que $\|x\| \leq 1$ y $|f(x)| \geq \|f\| - \epsilon$. Multiplicando x por un escalar de valor absoluto 1, si fuera necesario, podemos suponer que $f(x) \geq 0$, entonces, dado que f es hermitiana

$$|g(\frac{1}{2}(x + x^*))| = \frac{1}{2}|f(x) + f(x^*)| = f(x) \geq \|f\| - \epsilon$$

como $\|\frac{1}{2}(x + x^*)\| \leq 1$, por lo que se tiene que $\|g\| \geq \|f\| - \epsilon$ y la afirmación se sigue
Las formas lineales continuas sobre $\mathcal{A}$ pueden ser identificadas con las formas lineales reales continuas sobre $\mathcal{A}_h$.

Definición 1.2.7. Una *C^*-álgebra* es una álgebra de Banach involutiva $\mathcal{A}$ tal que $\|x\|^2 = \|x^*x\|$ para todo elemento $x \in \mathcal{A}$.

Definición 1.2.8. Una álgebra de *Von Neumann* es una *-subalgebra cerrada de $B(\mathscr{H})$ que contenga unidad en la topología débil.

Proposición 1.2.9. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Von Neumann de operadores actuando sobre $\mathscr{H}$, espacio de Hilbert, y sea (x_α) una red creciente en $\mathcal{A}_+$, entonces $(x_\alpha)_\alpha$ tiene supremo $x = \sup_\alpha x_\alpha$ en $\mathcal{A}_+$ y la red converge σ-fuerte a x.*

Definición 1.2.10. Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de Von Neumann actuando sobre el espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y sea w un funcional lineal positivo sobre $\mathcal{A}$, se dice que w es *normal* si $\sup_\alpha w(x_\alpha) = w(\sup_\alpha x_\alpha)$.

Teorema 1.2.11. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Von Neumann de operadores actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y sea w un estado sobre $\mathcal{A}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *w es normal*

2. *w es σ-débilmente continuo*

3. *Existe una matrix de densidad ρ (es decir, un operador de traza finita con $\mathbf{Tr}(\rho) = 1$) tal que:*
$$w(x) = \mathbf{tr}(\rho x).$$

1.3. Espacio de probabilidad Clásico como espacio Algebraico

Daremos la definición de espacio algebraico de acuerdo con Fagnola [9].

Definición 1.3.1. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra involutiva con unidad 1. Un *estado* φ sobre $\mathcal{A}$ es una transformación lineal $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, con las propiedades:

1. (Positividad) $\varphi(a^*a) \geq 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

2. (Normalización) $\varphi(1) = 1$.

Definición 1.3.2. Un *Espacio de Probabilidad Algebraico* es un par $(\mathcal{A}, \varphi)$ donde $\mathcal{A}$ es un álgebra involutiva con unidad y φ es un estado sobre $\mathcal{A}$.

Definición 1.3.3. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad algebraico y sea $\mathcal{B}$ un álgebra involutiva. Una *Variable Aleatoria Algebraica sobre $\mathcal{A}$ con valores en $\mathcal{B}$* es un $*$-homomorfismo
$$j : \mathcal{B} \to \mathcal{A}.$$

El siguiente ejemplo se encuentra en el libro de Fagnola [9].

Un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ determina únicamente a la álgebra involutiva conmutativa $\mathcal{A} = \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}; \mathbb{C})$ de las funciones $\mathcal{F}$-medibles, acotadas y complejo-valuadas sobre Ω. Una medida de probabilidad $\mathbf{P}$ sobre $\mathcal{F}$ induce un estado φ sobre $\mathcal{A}$ dado por
$$\varphi(f) = \int_\Omega f(\omega) \ \mathrm{d}\mathbf{P}(\omega).$$

Por lo tanto el espacio de probabilidad clásico $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ puede ser considerado como un espacio de probabilidad algebraico $(\mathcal{A}, \varphi)$.
Sea $(E, \mathcal{E})$ un espacio medible. Una variable aleatoria clásica sobre Ω con valores en E puede ser interpretada como una variable aleatoria algebraica. En efecto, se considera la álgebra involutiva $\mathcal{B} = \mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{E}; \mathbb{C})$. Una variable aleatoria clásica x puede ser descrita como una variable aleatoria algebraica por el $*$-homomorfismo
$$j : \mathcal{B} \to \mathcal{A} \quad j(f) = f \circ x.$$

Cabe decir que cada evento puede ser representado por una proyección en la álgebra involutiva $\mathcal{A}$ a través de la identificación con su función indicadora.

1.4. Teorema Espectral

Se menciona el Teorema espectral para dimensión finita para ver su relación con la teoría de probabilidad y mas adelante se vera que es un caso particular del Teorema Espectral (para operadores compactos).

Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert con producto interior $\langle , \rangle$.

Teorema 1.4.1. *(Teorema Espectral caso finito dimensional) Supóngase que T es un operador lineal sobre un espacio vectorial $\mathscr{H}$ finito-dimensional (Dim($\mathscr{H}$)= d) sobre $\mathbb{C}$ con producto interior, con distintos valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Supóngase que T es normal ($T^*T = TT^*$). Para cada i $(1 \leq i \leq k)$, sea W_i el subespacio de $\mathscr{H}$ asociado al valor propio λ_i y sea T_i la proyección ortogonal de $\mathscr{H}$ sobre W_i. Entonces lo siguiente se cumple:*

(a) $\mathscr{H} = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$.

(b) $W_i^{\perp} = \bigoplus_{j \neq i} W_i$

(c) $T_i T_j = \delta_{ij} T_i$ *para* $1 \leq i, j \leq k$

(d) $I = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$

(e) $T = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \cdots + \lambda_k T_k$.

Demostración: Se puede ver en Friedberg [10], Teorema 6.25, pag. 401.

□

Sea T un operador lineal como en el Teorema 1.4.1. Sea $\mathcal{B} = \{f | f : \Omega \to \mathbb{C}\}$, donde $\Omega = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.

Ahora se define $j : \mathcal{B} \to B(\mathscr{H})$, dado por

$$j(f) = f(T) = f(\lambda_1)T_1 + f(\lambda_2)T_2 + \cdots + f(\lambda_n)T_n$$

donde T_i son la proyecciones ortogonales del Teorema 1.4.1, $f(T)$ queda bien definido por el mismo teorema. Se puede probar que j es un $*$-homomorfismo, isométrico, además sea $\mathcal{A} := j(\mathcal{B}) \subset B(\mathscr{H})$, entonces $\|j(f)\| = \|f\|_{\sup} := \{\max |f(\lambda_i)| : 1 \leq i \leq n\}$.

En el siguiente ejemplo se muestra la importancia del teorema espectral, en la construcción de una medida de probabilidad dado cualquier estado φ.

Sea $\Omega = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \text{Spect}\, T, \mathcal{F} = 2^{\Omega}$, sea $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ cualquier estado arbitrario en $\mathcal{A}$, considérese la siguiente función $\mathbf{P}_{\phi}$ definida sobre $\mathcal{F}$:

$$\mathbf{P}_{\varphi}(A) = \varphi(j(I_A)),$$

esto produce una medida de probabilidad puesto que:

$\mathbf{P}_{\varphi}(\emptyset) = \varphi(j(0)) = \varphi(0) = 0, \mathbf{P}_{\varphi}(\Omega) = \varphi(j(1)) = \varphi(1) = 1.$

Sean $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$, entonces

$$\mathbf{P}_\varphi(\cup_i A_i) = \varphi(j(I_{\cup_i A_i})) = \varphi(\sum_{i=1}^{\infty} j(I_{A_i})) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(j(I_{A_i})) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}_\varphi(A_i)$$

la medida $\mathbf{P}_\varphi$ se le llama la *medida espectral* de T respecto al estado φ.

En particular, si $f = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) I_{\{\lambda_i\}}$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(j(f)) &= \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\varphi(j(I_{\{\lambda_i\}})) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\mathbf{P}_\varphi(\{\lambda_i\}) \\
&= \int_\Omega f \mathrm{d}\mathbf{P}_\varphi.
\end{aligned}$$

La igualdad anterior nos muestra cómo se relaciona la medida $\mathbf{P}_\phi$ con el estado ϕ.

Por otro lado, si $u \in \mathscr{H}$, $\|u\| = 1$, sea $\varphi : B(\mathscr{H}) \to \mathbb{C}$, $\varphi(X) = \langle u, Xu\rangle$, φ es un *estado puro asociado* a u, la medida espectral de T asociada a $\varphi|_\mathcal{A}$ también se llama medida espectral de T asociada a u, además tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_\phi(A) &= \varphi|_\mathcal{A}(j(I_A)) &&= \varphi(j(I_A)) \\
&= \langle u, j(I_A)u\rangle &&= \langle j(I_A)u, j(I_A)u\rangle \\
& &&= \|j(I_A)u\|^2
\end{aligned}$$

Ahora consideremos un espacio medible general $(\Omega, \mathcal{F})$. Sea $\mathscr{H}$ espacio de Hilbert complejo separable, sea $\mathcal{P}(\mathscr{H}) = \{$proyecciones ortogonales en $\mathscr{H}\}$.

Definición 1.4.2. Una *resolución de la identidad sobre* $\mathcal{F}$ es una transformación $R : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(\mathscr{H})$ con las siguientes propiedades:

- $R(\Omega) = I$
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$, entonces

  $$R(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} R(A_i)$$

  donde la serie converge en la topología fuerte.

Observación: A R también se le llama *observable* Ω*-valuada*.
Algunas consecuencias inmediatas:

a) $R(\emptyset) = 0$

b) $R(E\cap F)=R(E)R(F)$, para todo $E,F\in\mathcal{F}$.

Demostración: Primero consideremos que $A\subset B$, entonces $B=A\cup(B\backslash A)$ así se tiene que $R(B)=R(A)+R(B\backslash A)$ y por lo tanto $R(B\backslash A)=R(B)-R(A)$.

Sean F,E generales, entonces $E\cup F=(E\backslash(E\cap F))\cup(E\cap F)\cup(F\backslash(E\cap F))$, por lo que obtenemos

$$R(E\cup F)=R(E)-R(E\cap F)+R(F),$$

entonces multiplicando por $R(E)$ tenemos

$$R(E)=R(E)-R(E\cap F)+R(E)R(F)$$

y por lo tanto $R(E)R(F)=R(E\cap F)$.

□

La propiedad del inciso b) casi ninguna medida numérica la cumple.

Ejemplo 1.4.3. Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida y sea $\mathscr{H}=L_2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, se define $R:\mathcal{F}\to\mathcal{P}(\mathscr{H})$ dada por $R(A)=\mathrm{m}(I_A)$, operador de multiplicación por I_A. Entonces

- $R(\Omega)=\mathrm{m}(I)=I$
- Sean $A_1,A_2,\dots$ con $A_i\cap A_j=\emptyset$, así se tiene que

$$R(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\mathrm{m}(I_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i})=\mathrm{m}(\sum_{i=1}^{\infty}I_{A_i})=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{m}(I_{A_i})=\sum_{i=1}^{\infty}R(A_i)$$

Por lo tanto R es una resolución de la identidad.

1.4.1. Integración respecto a una resolución de la identidad

Sea $\mathrm{S}(\Omega)$ el álgebra de las funciones simples y medibles. Sea $f(x)$ una función simple en su descomposición estándar, es decir $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_iI_{A_i}$, con $\mathrm{Im}f=\{c_1,\dots,c_n\}$ y $A_i=f^{-1}(\{c_i\})$. Entonces se define $\int f\mathrm{d}R$ como

$$\int f\mathrm{d}R=\sum_i c_iR(A_i).$$

Sea $E\in\mathcal{F}$ y si $R(E)=0$, entonces se dice que E es *R-nulo*. Sea f cualquier función real valuada sobre Ω, se define el supremo esencial (ess. sup) de f como:

$$\operatorname{ess.}\sup_R f:=\inf\{\sup_{w\notin E}f(w)|E\,\text{es}\,R\text{-nulo}\}.$$

Sea $u, v \in \mathscr{H}$, $\gamma_u^R : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ dada por $\gamma_u^R(A) = \langle u, R(A)u\rangle$, se puede probar que γ es una medida finita. Sea $\gamma_{u,v}^R : \mathcal{F} \to \mathbb{C}$, $\gamma_{u,v}^R(A) = \langle u, R(A)v\rangle$ es una medida compleja. A γ_u^R se le llama *medida espectral de R respecto a u* y $\gamma_{u,v}^R$ es la *medida espectral de R respecto a u, v*.
La transformación $\mathrm{S}(\Omega) \to B(\mathscr{H})$ dada por $f \mapsto \int f\mathrm{d}R$ es un $*$-isomorfismo como lo prueba la siguiente proposición:

Proposición 1.4.4. *La transformación $f \mapsto \int f\mathrm{d}R$ tiene las siguientes propiedades:*

1. $f \mapsto \int f\mathrm{d}R$ *es lineal en f;*
2. $(\int f\mathrm{d}R)(\int g\mathrm{d}R) = \int fg\mathrm{d}R$;
3. $(\int f\mathrm{d}R)^* = \int \overline{f}\mathrm{d}R$;
4. $\langle(\int f\mathrm{d}R)u, (\int g\mathrm{d}R)v\rangle = \int \overline{f}g\mathrm{d}\gamma_{u,v}^R$
5. $\|\int f\mathrm{d}R\| = \textit{ess.}\sup\limits_R f$;
6. $\int f\mathrm{d}R = \int g\mathrm{d}R$ *si y sólo si $f = g$ R-c.s., es decir que $\{w \in \Omega : f(w) = g(w)\}$ es R-nulo.*

La media $\gamma = \gamma_u^R$ definida anteriormente se le llama *medida espectral de R respecto a u*.

Ahora se va a definir $\int f\mathrm{d}R$ para cualquier función f en $B(\Omega)$, medible y acotada. Sea $f \in B(\Omega)$, entonces existe $\{f_n\}$ sucesión de funciones simples tal que $f_n \to f$ uniformemente.

Proposición 1.4.5. *La transformación $f \mapsto \int f\mathrm{d}R$ de $B(\Omega)$ en $B(\mathscr{H})$ satisface los mismos incisos de la Proposición(1.4.4).*

Observación 1.4.6. *Sea $f \in B(\Omega)$ tal que $\frac{1}{f} = f^{-1} \in B(\Omega)$ y además ess.* $\sup < \infty$, *entonces $\int f\mathrm{d}R$ es invertible y $(\int f\mathrm{d}R)^{-1} = \int f^{-1}\mathrm{d}R$.*

Definición 1.4.7. *Se dice que $f \in B(\Omega)$ es esencialmente acotada cuando ess.* $\sup\limits_R |f| < \infty$, *donde R es una resolución de la identidad.*

Proposición 1.4.8. *Sean $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\Omega', \mathcal{F}')$ dos espacios medibles y sea $\phi : \Omega \to \Omega'$ una transformación medible. Si R es una resolución de la identidad en $\mathscr{H}$, y sea $R' = R\phi^{-1}$ y f' es una función R'-esencialmente acotada sobre Ω', entonces $f = f' \circ \phi$ es R-esencialmente acotada y*

$$\int f\mathrm{d}R = \int f'\mathrm{d}R'.$$

Teorema 1.4.9. *(Teorema espectral) Sea $A \in B(\mathscr{H})$, un operador auto-adjunto, entonces existe una única resolución de la identidad $R : B(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathscr{H})$ tal que*

i) $\int\limits_{\mathbb{R}} xR(\mathrm{d}x) = A$

ii) *Sea $C \in B(\mathbb{R})$ tal que $C \cap \mathit{Spect}A = \emptyset$, entonces C es R-nulo.*

Recíprocamente: Para cualquier operador auto-adjunto R real valuado, el operador $A = \int xR(\mathrm{d}x)$ es auto-adjunto.

Demostración: Ver Reed-Simon [14] y Weidmann [19].

□

Se tiene la generalización de este hecho:

Proposición 1.4.10. *Sea $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\&} \subset B(\mathscr{H})$, operadores auto-adjuntos, que conmutan, es decir $T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha$ para toda $\alpha, \beta \in \&$. Entonces existe una única resolución de la identidad $R : B(\mathbb{R}^\&) \to \mathcal{P}(\mathscr{H})$ tal que:*

i) $T_\alpha = \int\limits_{\mathbb{R}^\&} \pi_\alpha(x)R(\mathrm{d}x)$

ii) *Sean* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \&$, *entonces* $T_{\alpha_1} \cdots T_{\alpha_n} = \int\limits_{\mathbb{R}^\&} \pi_{\alpha_1}(x) \cdots \pi_{\alpha_n}(x)R(\mathrm{d}x)$

iii) *Sea* $C \in B(\mathbb{R}^\&)$ *tal que* $C \cap \underset{\alpha}{\times} \mathit{Spect} T_\alpha = \emptyset$, *entonces* $R(C) = 0$.

A R se le llama *resolución de la identidad conjunta* de $\{T_\alpha\}$.

Demostración: Ver Reed-Simon [14]. Mas adelante se hará una prueba utilizando el Teorema de consistencia de Kolmogorov.

□

Sea $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E})$ dos espacios medibles, sea $T : \Omega \to E$, y $R : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(\mathscr{H})$ una resolución de la identidad, se define $RT^{-1} : \mathcal{E} \to \mathcal{P}(\mathscr{H})$ dado por $RT^{-1}(c) = R(T^{-1}(c))$, entonces RT^{-1} es resolución de la identidad.

Si R_α es resolución de la identidad de $\{T_\alpha\}$ y R es una resolución de la identidad de $\mathcal{F}$, entonces $R_\alpha = R\,\pi_\alpha^{-1}$, donde π_α es la proyección de $\mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}$.

Proposición 1.4.11. *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible, $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, sea $\rho \in L_1(\mathscr{H})$ un estado y R una resolución de la identidad en $\mathcal{F}$, se define $\mu_\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ dada por $\mu_\rho(c) = \mathbf{tr}(\rho R(c))$. Entonces μ_ρ es una medida.*

Definición 1.4.12.

1. A μ_ρ definida como en la proposición anterior se le conoce como *medida espectral de R en el estado ρ.*

2. Si $\rho = |u\rangle\langle u|$con $\|u\| = 1, u \in \mathscr{H}$ entonces a $\mu_\rho = \mu_u$ se le llama *distribución de la observable R en el estado puro u.*

3. Si $A \in B(\mathscr{H})$ y R es resolución de la identidad, entonces μ_ρ se le llama *medida espectral de A respecto a ρ.*

4. Si $\rho = |u\rangle\langle u|$ entonces a $\mu_\rho = \mu_u$ se le conoce como *medida espectral de A en el vector u.*

5. Si $\{A_\alpha\} \in B(\mathscr{H})$ auto-adjuntos que conmutan, sea R la resolución de la identidad conjunta de $\{A_\alpha\}$, entonces a μ_ρ se le llama *distribución conjunta de la observables $\{A_\alpha\}$ en el estado ρ.*

Sean $\{A_\alpha\}$ operadores auto-adjuntos que conmutan, sea R su resolución de la identidad, sea R_α la resolución de la identidad de $\{A_\alpha\}$, se definen $\mu_\rho : B(\mathbb{R}^I) \to \mathbb{R}_+$ y $\mu_\rho^\alpha : B(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ dadas por $\mu_\rho(C) = \mathbf{tr}(\rho R(C))$, $\mu_\rho^\alpha(D) = \mathbf{tr}(\rho R_\alpha(D))$, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \mu_\rho^\alpha &= \mathbf{tr}(\rho R_\alpha(D)) = \mathbf{tr}(\rho R \pi_\alpha^{-1}(D)) \\ &= \mathbf{tr}(\rho R(\pi_\alpha^{-1}(D))) = \mu_\rho(\pi_\alpha^{-1}(D)). \end{aligned}$$

1.5. Espacio de Probabilidad Cuántico

Definición 1.5.1. Un *Espacio de Probabilidad Cuántico* es un espacio de probabilidad algebraico $(\mathcal{A}, \varphi)$ donde $\mathcal{A}$ es una álgebra de Von Neumann y φ es un estado σ-débil continuo sobre $\mathcal{A}$.
Un *evento* en el espacio de probabilidad cuántico $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un operador proyectivo en $\mathcal{A}$ ($T^2 = T$).

Una *variable aleatoria cuántica* en $(\mathcal{A}, \varphi)$ con valores en una álgebra de Von Neumann $\mathcal{B}$ es un homomorfismo continuo con respecto a la topología σ-débil,

$$j : \mathcal{B} \to \mathcal{A}.$$

Se pueden definir eventos de la misma manera cuando $\mathcal{A}$ es únicamente una C^*-álgebra pero el conjunto de eventos podría ser muy pobre. De hecho, si $\mathcal{A}$ es la C^*-álgebra de funciones continuas complejo-valuadas sobre $\mathbb{R}^d$, entonces el conjunto de eventos es trivial, sea $f \in \mathcal{A}$, $f^2 = f$ entonces $f \equiv 0$ ó $f \equiv 1$. Por otro lado una álgebra de Von Neumann es generada por proyecciones en $\mathcal{A}$.

Capítulo 2

Teorema de Consistencia de Kolmogorov y algunas aplicaciones

Para este capítulo nos basamos en C. Tudor [18] para el Teorema de Kolmogorov y en [17] para las medidas gaussianas reales y complejas. Se omitirán algunas demostraciones ya que son del conocimiento general esto con fin de no hacer tediosa la lectura. Empezamos con el teorema de consistencia de Kolmogorov para poder construir procesos gaussianos tanto reales como complejos y como una de sus aplicaciones importantes esta el Teorema de los pares de Gelfand.

2.1. Teorema de consistencia de Kolmogorov

Sea $(E, \mathcal{E})$ un espacio medible, T un conjunto, se define $E^T := \{g : T \to E | g \text{ es función}\}$, y $\mathcal{E}^T := \sigma(\pi_t : t \in T)$ es la menor σ-álgebra que hace medible a todas la proyecciones π_t, donde $\pi_t : E^T \to E$ es la proyección en la t-ésima coordenada. Además si T es finito, entonces $\mathcal{E}^T$ es la σ-álgebra producto.

Definición 2.1.1. a) Sea $F \subset T$ subconjunto finito, consideremos las siguientes proyecciones π^F sobre F dadas por $\pi^F : E^T \to E^F$, $\pi^F(g) = g|_F$. A π^F se le conoce como la proyección finito dimensional.

b) Sea $F \subset G \subset T$ subconjuntos finitos, entonces se define las proyecciones π_G^F dadas por $\pi_G^F : E^G \to E^F$, $\pi_G^F(h) = h|_F$.

Se puede observar lo siguiente

$$\begin{tikzcd} E^T \arrow[r, "\pi^G"] \arrow[dr, "\pi^F"'] & E^G \arrow[d, "\pi_G^F"] \\ & E^F \end{tikzcd}$$

Observación 2.1.2. *1. π^F es $(\mathcal{E}^T, \mathcal{E}^F)$-medible.*

2. π_G^F es $(\mathcal{E}^G, \mathcal{E}^F)$-medible.

Definición 2.1.3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad, $(E, \mathcal{E})$ un espacio de medible, sea $X : \Omega \to E$ una variable aleatoria, entonces la *distribución de X con respecto a **P*** es $\mathbf{P}_X = \mathbf{P} \circ X^{-1}$.

Definición 2.1.4. *Sea $(E, \mathcal{E})$ un espacio de medible y T un conjunto. Supongamos que para todo $F \subset T$, finito $\boldsymbol{P}^T : \mathcal{E}^F \to [0,1]$ es medida de probabilidad. Decimos que $\{\boldsymbol{P}^F : F \subset T, F \text{ finito}\}$ es un sistema proyectivo si $F \subset G \subset T$, F, G finitos, entonces*

$$\boldsymbol{P}^F = \boldsymbol{P}^G_{\pi^F_G} = \boldsymbol{P}^G \circ (\pi^F_G)^{-1}$$

Sea $\{X_t\}$, $X_t : \Omega \to E$ un proceso estocástico. Observemos que podemos poner a $\{X_t\}_{t \in X}$ como función $X : \omega \to E^T$ por medio de $X(\omega)(t) = X_t(\omega)$. Para cada $\omega \in \Omega$, la función $X(\omega)$ se conoce como la ω-trayectoria. Se puede verificar que X es $\mathcal{F}$-$\mathcal{E}^T$-medible.

Proposición 2.1.5. *Supongase que $F \subset G \subset T$, con F, G finitos, como $\pi^F = \pi^F_G \circ \pi^G$, entonces la distribución finito dimensional con base F, $\boldsymbol{P}^F$ es la distribución de π^F_G respecto a la medida $\boldsymbol{P}^G$.*

Demostración: Sea $A \in \mathcal{E}^F$, por demostrar que $\mathbf{P}^F(A) = \mathbf{P}^G((\pi^F_G)^{-1}(A))$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^F(A) &= \mathbf{P}((\pi^F \circ X)^{-1}(A)) \\
&= \mathbf{P}((\pi^F_G \circ \pi^G \circ X)^{-1}(A)) \\
&= \mathbf{P}(X^{-1}((\pi^G)^{-1}((\pi^F_G)^{-1}(A))) \\
&= \mathbf{P}((\pi^G \circ X)^{-1}(B)) \quad \text{donde } B = (\pi^F_G)^{-1}(A) \\
&= \mathbf{P}^G(B) = \mathbf{P}^G(\pi^F_G)^{-1}(A)).
\end{aligned}$$

□

Las proyecciones finito dimensional de un proceso estocástico son un ejemplo de un sistema proyectivo.
Notación: Sea F un subconjunto de T, finito. Definimos $\mathcal{C}^F := (\pi^F)^{-1}(\mathcal{E}^F) = \{\pi^F)^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}^F\}$ y $\mathcal{C} := \bigcup_{f \in T} \mathcal{C}^F \subset \mathcal{E}^T$.
Los elementos de $\mathcal{C}^F$ se les llama cilindros con base F y a los elementos de $\mathcal{C}$ se les llama cilindros medibles.

Proposición 2.1.6. *Los siguientes enunciados se cumplen:*

1. *Si $L \subset F \subset T$, L, F finitos, entonces $\mathcal{C}^L \subset \mathcal{C}^F$.*
2. *Cada $\mathcal{C}^F$ es σ-álgebra.*
3. *$\mathcal{C}$ es álgebra.*
4. *$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}^T$.*

Demostración:

1. Para $L \subset F$ se tiene que $\pi^F = \pi_F^L \circ \pi^F$ y las proyecciones son medibles entonces se tiene que $(\pi_F^L)^{-1}(\mathcal{E}^L) \subset \mathcal{E}^F$ y
$$\begin{aligned} \mathcal{C}^L &= (\pi^L)^{-1}(\mathcal{E}^L) \\ &= (\pi^F)^{-1}((\pi_F^L)^{-1}(\mathcal{E}^L)) \\ &\subset (\pi^F)^{-1}(\mathcal{E}^F) = \mathcal{C}^F. \end{aligned}$$

2. $\mathcal{C}^F$ es σ-álgebra puesto que:

   i) $\emptyset, E^F \in \mathcal{C}^F$ ya que $\emptyset, E^F \in \mathcal{E}^F$.

   ii) Sea $A \in \mathcal{C}^F$, entonces $A \in \mathcal{E}^F$ así $A^c \in \mathcal{E}^F$. Por lo tanto $A^c \in \mathcal{C}^F$.

   iii) Si $(A_n) \in \mathcal{C}^F$, entonces $(A_n) \in \mathcal{E}^F$ por lo que $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n) \in \mathcal{E}^F$. Por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n) \in \mathcal{C}^F$.

   Por lo que $\mathcal{C}^F$ es una σ-álgebra.

3. $\mathcal{C}$ es algebra ya que:

   i) $\emptyset, E^F \in \mathcal{C}$ ya que $\emptyset, E^F \in \mathcal{C}^F$.

   ii) Sea $A \in \mathcal{C}$, entonces $A \in \mathcal{C}^F$ para algún $F \subset T$ finito y como $\mathcal{C}^F$ es σ-álgebra. se tiene que $A^c \in \mathcal{C}^F$ y por lo tanto $A^c \in \mathcal{C}$.

   iii) Si $(A_1, A_2 \in \mathcal{C}$, entonces $A_1 \in \mathcal{C}^{F_1}$ y $A_2 \in \mathcal{C}^{F_2}$ donde F_1, F_2 son subconjuntos finitos de T. Tomemos $F = F_1 \cup F_2$ que sigue siendo finito, así $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^F$ esto por el inciso 1. Por lo tanto $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{C}^F$ ya que $\mathcal{C}^F$ es una σ-álgebra. Así se tiene que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{C}$.

   Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es una álgebra.

4. Sólo falta probar que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}^T$.
La medibilidad de las proyecciones π^F implican que $\mathcal{C}^F = (\pi^F)^{-1}(\mathcal{E}^F) \subset \mathcal{C}^T$ y por lo tanto $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}^T$. Recíprocamente, puesto que $\mathcal{E}^T = \sigma(\cup_{t \in T}(\pi^t)^{-1}(\mathcal{E}_t))$ y $(\pi^t)^{-1}(\mathcal{E}_t) \subset \mathcal{C}$, se deduce que $\mathcal{E}^T = \sigma(\mathcal{C})$.

□

Teorema 2.1.7. *(Teorema de consistencia de Kolmogorov) Sea T cualquier conjunto, sea E un espacio topológico, $\mathcal{E} = B(E)$.*
Supongamos que para todo subconjunto finito $F \subset T$, existe $\boldsymbol{P}_F : \mathcal{E}^F \to [0,1]$ tal que el sistema $(E^F, \mathcal{E}^F, \boldsymbol{P}_F, \pi_F^L)_{F,L \subset T}$ con F, L finitos, es proyectivo (condición de consistencia). Entonces:

a) Sea $Q : \mathcal{C} \to [0,1]$, $Q(A) = \boldsymbol{P}_F(B)$ si $A = (\pi^F)^{-1}(B)$ con $F \subset T$ finito y $B \in \mathcal{E}^F$. Con la propiedad $Q(\mathcal{E}^T) = 1$ y $Q(A \cup B) = Q(A) + Q(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.

b) Si E tiene la siguiente propiedad , que para todo $F \subset T$ finito, para todo $B \in \mathcal{E}^F$,

$$\boldsymbol{P}^F(B) = \sup\{\boldsymbol{P}^F(K) : K \subset B \ \ \textit{subconjunto compacto}\}$$

entonces Q, definida como en el inciso anterior, se puede extender a una medida de probabilidad $Q : \mathcal{E}^T \to [0,1]$.

Demostración: Nos basaremos en Tudor. a) Sea $Q : \mathcal{C} \to [0,1]$ dada por $Q(A) = \mathbf{P}_F(B)$ si $A = (\pi^F)^{-1}(B)$ donde $B \in \mathcal{E}^F$, además $\mathcal{C} = \bigcup_{F\subset T} \mathcal{C}^F$.
Se probara que Q esta bien definida. Sea $A \in \mathcal{C}$ y suponga que $A \in (\mathcal{C}^{F_1} \cap \mathcal{C}^{F_2})$ entonces existe $B_i \in \mathcal{E}^{F_i}$ para $i = 1, 2$. Por lo que $A = (\pi^{F_i})^{-1}(B_i)$ con $i = 1, 2$. Ahora de lo que se trata es demostrar que $\mathbf{P}_{F_1}(B_1) = \mathbf{P}_{F_2}(B_2)$, sea $F = F_1 \cup F_2 \subset T$ finitos entonces $\mathcal{C}^{F_i} \subset \mathcal{C}^F$. Por lo tanto $A \in \mathcal{C}^F = (\pi^F)^{-1}(\mathcal{E}^F)$, entonces existe $C \in \mathcal{E}^F$ tal que $A = (\pi^F)^{-1}(C)$.
Así tenemos que:

$$\begin{aligned} A &= (\pi^F)^{-1}(C) \\ &= (\pi^{F_i})^{-1}(B_i) \\ &= (\pi_F^{F_i} \circ \pi^F)^{-1}(B_i) \\ &= (\pi^F)^{-1}((\pi_F^{F_i})^{-1}(B_i)) \end{aligned}$$

entonces $A = (\pi_F^{F_i})^{-1}(B_i)$ puesto que las proyecciones son suprayectivas, así se tiene que:

$$\mathbf{P}_F(C) = \mathbf{P}_F((\pi_F^{F_i})^{-1}(B_i)) = \mathbf{P}_{F_i}(B_i) \ \text{ donde } \ i = 1, 2.$$

esto ultimo por la condición de consistencia. Por lo tanto Q como función esta bien definida.

Ahora, sea $A, B \in \mathcal{C}$ con $A \cap B = \emptyset$, sea $F \subset T$ finito tal que $A, B \in \mathcal{C}^F$, así existen $A_1, B_1 \in \mathcal{E}^F$ tal que

$$A = (\pi_F)^{-1}(A - 1)$$

$$B = (\pi_F)^{-1}(B - 1).$$

entonces $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, esto por la inyectividad de π^F.
Por lo tanto se tiene:

$$\begin{aligned} Q(A \cup B) &= Q((\pi^F)^{-1}(A \cup B)) \\ &= \mathbf{P}_F(A_1 \cup B_1) \\ &= \mathbf{P}_F(A_1) + \mathbf{P}_F(B_1) \\ &= Q((\pi^F)^{-1}(A_1)) + Q((\pi^F)^{-1}(B_1)) \\ &= Q(A) + Q(B). \end{aligned}$$

Sean $A, B \in \mathcal{C}$, $A \subset B$, entonces

$$Q(A) \leq Q(B) \leq Q(E) = 1$$

esto prueba la primera parte.

$b)$ Se ocupara lo siguiente, Q es una casi medida en $\mathcal{C}$ si y solo si $(A_i)_i$ una sucesión decreciente, con $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} Q(A_i) = 0$.
Sea

$$\mathcal{K} = \{(\pi^F)^{-1}(C) : F \subset T, \text{ finito}, C \subset E^T \text{ compacto}\}.$$

los elementos de $\mathcal{K}$ son cerrados pero no necesariamente compactos.

Afirmación 2.1.8. *i) $\mathcal{K}$ tiene la propiedad de la intersección finita, es decir, sea $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{K}$ tal que $\bigcap\limits_{l=i}^{n} K_l \neq \emptyset$, entonces $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$*

ii) Para todo $A \in \mathcal{C}$ se tiene $Q(A) = \sup\{Q(K) : k \subset A, K \in \mathcal{K}\}$

Admitamos la afirmación. Supongamos que existe $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{C}$, con $A_i \supset A_{i+1}$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ y existe $\delta > 0$ tal que $Q(A_i) \geq \delta$ para todo $i \in \mathbb{N}$. para todo i en $\mathbb{N}$, sea $C_i \subset A_i$ con $C_i \in \mathcal{K}$ entonces por el inciso $ii)$ se tiene que:

$$Q(A_i) - \frac{\delta}{2^{i+1}} < Q(C_i)$$

y como $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i \subset \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, por el inciso $i)$ se tiene que existe $n \in \mathbb{B}$ tal que $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i = \emptyset$ y

$$\begin{aligned}
\delta < Q(A_n) &= Q(A_n\,(\bigcap_{i=1}^{n} C_i)) &&= Q(\bigcup_{i=1}^{n}(A_n \backslash C_i)) \\
&\leq Q(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \backslash C_i)) &&\leq \sum_{i=1}^{n} Q(A_i \backslash C_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(Q(A_i) - Q(C_i)) &&< \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{2^{i+1}} \\
&\leq \frac{\delta}{2} < \delta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto no existe δ con tal propiedad. Así $\lim\limits_{n\to\infty} Q(A_i) = 0$.

Probemos la Afirmación (2.1.8)

$ii)$ Sea $A \in \mathcal{C}$, entonces existe $F \subset T$ finito y existe $B \in \mathcal{B}^F$ tal que $A = (\pi^F)^{-1}(B)$, entonces:

$$\begin{aligned} Q(A) = \mathbf{P}_F(B) &= \sup\{\mathbf{P}_F(K) : K \subset B,\ K \text{ compacto}\} \\ &= \sup\{Q((\pi^F)^{-1}(K)) : K \subset B,\ K \text{ compacto}\} \\ &\leq \sup\{Q(C) : C \subset A,\ C \in K\} \\ &\leq Q(A). \end{aligned}$$

Por lo tanto $Q(A) = \sup\{Q(K) : K \subset A, K \in \mathcal{K}\}$.

$i)$ Sea $\mathcal{K} = \{(\pi^F)^{-1}(K) : F \subset T$, finito, $k \subset E^F, K$ compacto$\}$, sea $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{K}$ tal que $\bigcap_{j=1}^{n} C_j \neq \emptyset$ para toda $n\mathbb{N}$. Por demostrar que $\bigcap_{j=1}^{\infty} \neq \emptyset$. Sea $F_j \subset T$ finito y $K_j \subset E^{F_j}$ tal que $C_j = (\pi^F)^{-1}(K_j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$, sea $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ por lo tanto F es a lo más numerable para todo $t \in F$, sea $n_t = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : t \in F_n\}$.

Por lo tanto $K_{n_t} \subset E^{F_{n_t}}$ es compacto y $R_t := \pi_t^{F_{n_t}}(K_{n_t})$ es un subconjunto de E. Así R_t es compacto.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $G_n = \underset{t\in(F\setminus F_n)}{\times} R_t \subset E^{F\setminus F_n}$ es compacto (por el Teorema de Tikhonov), entonces $(K_n \times G_n) \subset (E^{F_n} \times E^{F\setminus F_n}) = E^F$, observemos que $K_n \times G_n$ es compacto además esta contenido en $(\pi_{F_n}^F)^{-1}(K_n)$. Por lo tanto se tiene que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(K_n \times G_n) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}(\pi_{F_n}^F)^{-1}(K_n) =: C$$

Ahora se pretende demostrar que

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty}(K_n \times G_n) \qquad \ldots (*)$$

Sea $x \in C$, por demostrar que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(K_n \times G_n)$, es decir que $x \in K_n \times G_n$ para todo $n \geq 0$.

Entonces para todo $n \geq 1$ $x \in (\pi_{F_n}^F)^{-1}(K_n)$ por lo que se tiene que $\mathbf{P}_{F_n}^F(x) \in K_n$, ahora solo falta probar que $\pi_{F\setminus F_n}^F \in G_n$, para esto se probara que para toda $t \in F\setminus F_n$ se tiene $\pi_t^{F\setminus F_n}\pi_{F\setminus F_n}^F(x) \in R_t$. observemos que $\pi_t^{F\setminus F_n}\pi_{F\setminus F_n}^F = \pi_t^F = \pi_t^{F_{n_t}}\pi_{F_{n_t}}^F$. Así tenemos que

$$\pi_t^{F\setminus F_n}\pi_{F\setminus F_n}^F(x) = \pi_t^{F_{n_t}}\pi_{F_{n_t}}^F(x) \in \pi_t^{F_n}(K_{n_t}) = R_t.$$

Por lo tanto $\pi_{F_{n_t}}^F(x) \in G_n$. Así $x \in K_n \times G_n$ para todo n, de donde se obtiene que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(K_n \times G_n)$.

Así

$$\begin{aligned}
\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j &= \bigcap_{j=1}^{\infty} (\pi^{F_j})^{-1}(K_j) \\
&= \bigcap_{j=1}^{\infty} (\pi^F_{F_j}\pi^F)^{-1}(K_j) \\
&= (\pi^F)^{-1}(\bigcap_{j=1}^{\infty} (\pi^F_{F_j})^{-1}(K_j)) \\
&= (\pi^F)^{-1}(C)
\end{aligned}$$

como $\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j \neq \emptyset$ si y solo si $C \neq \emptyset$, entonces basta probar que $C \neq \emptyset$, es decir que para todo $n \geq 1 \bigcap_{l=1}^{n}(K_l) \times G_l \neq \emptyset$.

En efecto, para todo $k \in \mathbb{N}$ sea $L_k = \bigcup_{l=1}^{k} F_l, \quad L_k \subset T$ finito, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
(\pi^F_{L_k})^{-1}(\bigcap_{n=1}^{k} \pi^{L_k}_{F_n})^{-1}(K_n) &= \bigcap_{n=1}^{k} (\pi^F_{L_k})^{-1}((\pi^{L_k}_{F-n})^{-1}(K_n)) \\
&= \bigcap_{n=1}^{k} (\pi^{L_k}_{F_n}\pi^F_{L_k})^{-1}(K_n) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} (\pi_{F_n}F)^{-1}(K_n)
\end{aligned}$$

por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\pi^{L_k})^{-1}(\bigcap_{n=1}^{k} (\pi^{L_k}_{F_n})^{-1}(K_n)) &= \bigcap_{n=1}^{k} (\pi^{L_k}_{F_n}\pi^{L_k})^{-1}(K_n) \\
&= \bigcap_{n=1}^{k} (\pi^{F_n})^{-1}(K_n) \\
&= \bigcap_{n=1}^{k} C_n \neq \emptyset
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bigcap_{n=1}^{k} (\pi^{L_k}_{F_n})^{-1}(K_n) \neq \emptyset$.

$\square$

Lema 2.1.9. *Sea E un espacio métrico de una de las siguientes formas:*

a) E es a lo más numerable (dotado con la topología discreta);

b) E *es un espacio localmente compacto con base numerable;*

c) E *es un espacio métrico separable y compacto.*

Si $\boldsymbol{P}$ *es una probabilidad sobre* $B(E)$*, entonces*

$$\boldsymbol{P}(A) = \sup\{\boldsymbol{P}(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}, \quad \forall A \in B(E).$$

Teorema 2.1.10. *(La construcción de Kolmogorov) Sea* E *un espacio métrico como en el lema anterior y para cada* $F \subset T$*,* F *finito, sea* $\boldsymbol{P}_F$ *una probabilidad en* $B(E)^F$ *tal que el sistema*

$$\mathcal{L} = \{E^F, B(E)^F, \boldsymbol{P}_F, \pi_F^L; F \subset L \subset T, F, L \text{ finitos}\}$$

sea proyectivo. Entonces $\mathcal{L}$ *tiene un límite proyectivo* $\boldsymbol{P}$*, único. En particular el proceso canónico* $(E^F, B(E)^F, \boldsymbol{P}, \{\pi_t\}_{t\in T})$ *satisface*

$$\boldsymbol{P} \circ [\varphi_\pi^F]^{-1} = \boldsymbol{P} \circ \pi_F^{-1} = \boldsymbol{P}_F, \quad \forall F \subset T, F \text{ finito},$$

es decir, el proceso $\{\pi_t\}_{t\in T}$ *tiene la familia* $\{\boldsymbol{P}_F\}_{F\subset T, F \text{ finito}}$ *como distribuciones finito dimensionales.*

Demostración: Para cada $F \subset T$, F finito, el espacio $(E^F, B(E)^F)$ satisface el inciso $a)$ del Teorema de consistencia de Kolmogorov (2.1.7) junto con el lema anterior. Sea $\mathbf{P}$ el límite proyectivo dado por el Teorema de consistencia de Kolmogorov. Es claro que el proceso $(E^F, B(E)^F, \mathbf{P}, \{\pi_t\}_{t\in T})$ satisface las condiciones deseadas.

□

Una Aplicación inmediata a nuestros trabajo es la demostración del siguiente teorema:

Proposición 2.1.11. *Sea* $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\&} \subset B(\mathscr{H})$*, operadores auto-adjuntos, que conmutan, es decir* $T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha$ *para toda* $\alpha, \beta \in \&$*. Entonces existe una única resolución de la identidad* $R : B(\mathbb{R}^\&) \to \mathcal{P}(\mathscr{H})$ *tal que:*

i) $T_\alpha = \int\limits_{\mathbb{R}^\&} \pi_\alpha(x) R(\mathrm{d}x)$

ii) Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \&$*, entonces* $T_{\alpha_1} \cdots T_{\alpha_n} = \int\limits_{\mathbb{R}^\&} \pi_{\alpha_1}(x) \cdots \pi_{\alpha_n}(x) R(\mathrm{d}x)$

iii) Sea $C \in B(\mathbb{R}^\&)$ *tal que* $C \cap \underset{\alpha}{\times} \mathit{Spect} T_\alpha = \emptyset$*, entonces* $R(C) = 0$*.*

A R se le llama *resolución de la identidad conjunta* de $\{T_\alpha\}$.

Demostración: Se divide en dos pasos.

Paso1): Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \&$ construimos una resolución de la identidad conjuntta para $\{T_{\alpha_1}, T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_n}\}$. Sea $\Omega = \text{Spect}T_{\alpha_1} \times \cdots \times \text{Spect}T_{\alpha_n}$ y $\mathcal{F}$ la σ- álgebra de Borel de Ω, es decir, $\mathcal{F} = B(\text{Spect}T_{\alpha_1}) \otimes \cdots \otimes B(\text{Spect}T_{\alpha_n})$.

Sea $u, v \in \mathscr{H}$, sea $\gamma = \gamma_{u,v}^{T_{\alpha_1},\dots,T_{\alpha_n}} : \mathcal{F} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\gamma(A_1 \times \cdots \times A_n) = \langle u, R_{\alpha_1}(A_1) \cdots R_{\alpha_n}(A_n)v \rangle$$

donde $R_\alpha : B(\text{Spect}T_\alpha)) \to \mathcal{P}(\mathscr{H})$ es la resolución de la identidad asociada a T_α.

Por demostrar que $R_\alpha(A)R_\beta(B) = R_\beta(B)R_\alpha(A)$ para toda $\alpha, \beta \in \&, A \in B(\text{Spect}T_\alpha), B \in B(\text{Spect}T_\beta)$. Por el calculo funcional solo se tiene que probar que $I_A(T_\alpha)I_B(T_\beta) = I_B(T_\beta)I_A(T_\alpha)$. Como $T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha$ por lo que para cualquiera potencias n, m se tiene $T_\alpha^n T_\beta^m = T_\beta^m T_\alpha^n$. Sean q, p dos polinomios entonces se tiene $p(T_\alpha)q(T_\beta) = q(T_\beta)p(T_\alpha)$.

Sean $f : B(\text{Spect}T_\alpha) \to \mathbb{C}$ y $g : B(\text{Spect}T_\beta) \to \mathbb{C}$ dos funciones continuas, entonces existen $\{p_n\}, \{q_n\}$ sucesión de polinomios tales que $p_n \to f$ y $q_n \to g$ uniformemente.

Sea $f(T_\alpha) = \lim_{n\to\infty} p_n(T_\alpha)$ y $g(T_\beta) = \lim_{n\to\infty} p_n(T_\beta)$ donde la convergencia es la norma de $B(\mathscr{H})$. Entonces

$$\begin{aligned} f(T_\alpha)g(T_\beta) &= \lim_{n\to\infty} p_n(T_\alpha) \lim_{n\to\infty} q_n(T_\beta) = \lim_{n\to\infty} p_n(T_\alpha)q_n(T_\beta) \\ &= \lim_{n\to\infty} q_n(T_\beta)p_n(T_\alpha) = g(T_\beta)f(T_\alpha) \end{aligned}$$

Ahora sean $A \in \text{Spect}T_\alpha, B \in \text{Spect}T_\beta$ conjuntos cerrados, entonces $I_A = \lim_{n\to\infty} f_n$ en la convergencia puntual. Sea $x \notin A$ se define

$$f_n(z) = \frac{\mathrm{d}(z,x)}{\mathrm{d}(z,A) + \mathrm{d}(z,x)}$$

Sea $C_n = \{z \in \mathbb{R} : \mathrm{d}(z,A) < \frac{1}{n}\}$, nótese que $A \subset C_n$ y C_n es abierto además $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = A, \bigcup C_n^c = A^c$. Entonces la función $f_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ queda definida como

$$f_n(z) = \frac{\mathrm{d}(z, C_n^c)}{\mathrm{d}(z,A) + \mathrm{d}(z,C_n^c)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z \in C_n^c \\ \in (0,1) & \text{si} \quad z \notin A \cup C_n^c \\ 1 & \text{si} \quad z \in A \end{cases}$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z \notin A \\ 1 & \text{si} \quad z \in A \end{cases} = I_A(z)$$

Entonces por lo anterior tenemos que

$$R_\alpha(A) = I_A(T_\alpha) = \lim_{n\to\infty} f_n(T_\alpha)$$

en la topología fuerte.

Similarmente, existe una sucesión de funciones, $\{g_n\}$ tal que $g_n : \text{Spect}T_\beta \to \mathbb{R}$ son continuas y $g_n \to I_B$. Por lo tanto

$$I_B(T_\beta) = \lim_{n\to\infty} g_n(T_\beta)$$

en la topología fuerte.

Ahora se probará que $f_n(T_\alpha)g_n(T_\beta) \to I_A(T_\alpha)I_B(T_\beta)$ en la topología fuerte. Sea $u \in \mathscr{H}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|I_A(T_\alpha)I_B(T_\beta)u - f_n(T_\alpha)g_n(T_\beta)u\| &\leq \|I_A(T_\alpha)I_B(T_\beta)u - f_n(T_\alpha)I_B(T_\beta)u\|+ \\
&\quad +\|f_n(T_\alpha)I_B(T_\beta)u - f_n(T_\alpha)g_n(T_\beta)u\| \\
&= \|(I_A(T_\alpha) - f_n(T_\alpha))I_B(T_\beta)u\|+ \\
&\quad +\|f_n(T_\alpha)(I_B(T_\beta) - g_n(T_\beta))u\| \\
&\leq \|I_B(T_\beta)u - g_n(T_\beta)u\|
\end{aligned}$$

Como $f_n(T_\alpha)g_n(T_\beta) \to I_A(T_\alpha)I_B(T_\beta)$ converge en la topología fuerte, similarmente tenemos que $g_n(T_\beta)f_n(T_\alpha) \to I_B(T_\beta)I_A(T_\alpha)$ y como $f_n(T_\alpha)g_n(T_\beta) = g_n(T_\beta)f_n(T_\alpha)$ para toda n, por lo tanto se tiene que $I_A(T_\alpha)I_B(T_\beta) = I_B(T_\beta)I_A(T_\alpha)$.

Sea $A \subset \text{Spect}T_\alpha$ cerrado fijo y sea

$$\mathcal{L} = \{B \subset \text{Spect}T_\beta : B \in \mathcal{B}(\text{Spect}T_\beta); I_A(T_\alpha)I_B(T_\beta) = I_B(T_\beta)I_A(T_\alpha)\}$$

se puede probar que $\mathcal{L}$ es un λ-sistema:

a) Puesto que $B = \text{Spect}T_\beta \in \mathcal{L}$

b) sean $B_1, B_2 \in \mathcal{L}$ con $B_1 \subset B_2$ entonces $B_2 \backslash B_1 \in \mathcal{L}$.

$$I_A(T_\alpha)I_{B_2\backslash B_1}(T_\beta) = I_A(T_\alpha)I_{B_2}(T_\beta) - I_A(T_\alpha)I_{B_1}(T_\beta) = I_{B_2\backslash B_1}(T_\beta I_A(T_\alpha))$$

c) Sean $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ donde $B_i \in \mathcal{L}$ tal que $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, por demostrar que $B \in \mathcal{L}$. Esto se debe a que $I_B = \lim_{i\to\infty} I_{B_i}$ por lo que $I_B(T_\beta) = \lim I_{B_i}(T_\beta)$ converge en la topología fuerte, así obtenemos que

$$\begin{aligned}
I_A(T_\alpha)I_B(T_\beta) &= I_A(T_\alpha) \lim_{i\to\infty} I_{B_i}(T_\beta)v \\
&= \lim_{i\to\infty} I_A(T_\alpha)I_{B_i}(T_\beta)v = \lim_{i\to\infty} I_{B_i}(T_\beta)I_A(T_\alpha)v \\
&= I_B(T_\beta)I_A(T_\alpha)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $B \in \mathcal{L}$.

Paso 2): Consideremos $\Omega = \text{Spect}T_{\alpha_1} \times \cdots \times \text{Spect}T_{\alpha_n}$ tal que $\{\alpha_i\}$ es un conjunto finito con $\alpha_i \in \&$, sean $A_i \in B(\text{Spect}T_{\alpha_i})$ con $i = 1, 2, \ldots, n$, sean $u, v \in \mathscr{H}$, consideremos $u = v$. Entonces

$$\gamma(A_1 \times \cdots \times A_n) = \langle u, I_{A_1}(T_{\alpha_1}) \cdots I_{A_n}(T_{\alpha_n})u\rangle \geq 0.$$

Sea $C \in \mathcal{F}$, sea $R(C) : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, con $R(C) \in \mathcal{P}(\mathscr{H})$. Si $C = A_1 \times \cdots \times A_n$ entonces

$$R(C) = I_{A_1}(T_{\alpha_1}) \cdots I_{A_n}(T_{\alpha_n}).$$

Ahora para C general se tiene que $\gamma = \gamma_{u,v}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} : \mathcal{F} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\langle u, R(C)u\rangle = \gamma_{u,v}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(C).$$

Sea

$$\mathcal{L} = \{B \in B(\Omega) : \text{Existe un único } R(B) \in \mathcal{P}(\mathscr{H}) \text{ tal que } \langle u, R(B)u\rangle = \gamma_{u,v}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(B), \forall u, v \in \mathscr{H}\}$$

También sea $\mathcal{P} = \{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{B}(\text{Spect}T_{\alpha_i})\}$, se verifica que $\mathcal{P}$ es un π-sistema y $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$.

Por demostrar que $\mathcal{L}$ es un λ-sistema.

a) Se verifica fácilmente que $\Omega \in \mathcal{L}$

b) sean $B, C \in \mathcal{L}$ con $B \subset C$ por demostrar que $C \backslash B \in \mathcal{L}$. Como

$$\langle u, R(C)u\rangle - \langle u, R(B)u\rangle = \gamma_{u,v}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(C \backslash B) \geq 0$$

se tiene que $R(C) \geq R(B)$ y por lo tanto $R(C) - R(B) \in \mathcal{P}(\mathscr{H})$, entonces $R(C\backslash B) := R(C) - R(B)$.

c) Sean $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ donde $B_i \in \mathcal{L}$ tal que $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, por demostrar que $B \in \mathcal{L}$. Observemos que $0 \leq R(B_i) \leq R(B_{i+1})$ y $\|R(B_i\| \leq 1$ y sea $A = \text{lím}\, R(B_i)$ la convergencia en la topología débil-* y $\|A\| = 1$. Si $A \geq 0$ entonces $\langle u, Au\rangle = \langle u, \text{lím}\, R(B_i)u\rangle \geq 0$, por lo tanto

$$A = \text{lím}\, R(B_i) \text{ en la topología fuerte.}$$

Falta probar que $A^2 = A$. Veamos que

$$\begin{aligned} A^2 - R(B_i) &= A^2 - R(B_i)A + R(B_i)A - (R(B_i))^2 = (A - R(B_i))A + R(B_i)(A - R(B_i)) \\ &= R(B_i)(A - R(B_i)). \end{aligned}$$

entonces $\|R(B_i)(A - R(B_i))u\| \leq \|A - R(B_i)u\| \to 0$ por lo tanto $R(B_i) \to A^2$ en la topología fuerte. Así se obtiene que $A^2 = A$.

Sea π_{α_i} la proyección en la α_i-ésima coordenada, es decir, $\pi_{\alpha_i} : \Omega \to \text{Spect } T_{\alpha_i} \subset \mathbb{R}$. Por demostrar que

$$\int\limits_{\Omega} \pi_{\alpha_i}(w) R(\mathrm{d}w) = T_{\alpha_i}$$

Sean $u, v \in \mathscr{H}$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle u, \int\limits_{\Omega} \pi_{\alpha_i}(w) R(\mathrm{d}w) v\rangle &= \int\limits_{\Omega} \pi_{\alpha_i}(w) \langle u, R(\mathrm{d}w) v\rangle = \int\limits_{\Omega} \pi_{\alpha_i}(w) \gamma_{u,v}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\mathrm{d}w) \\
&= \int\limits_{\text{Spect } T_{\alpha_i}} x(\gamma_{u,v}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \pi_{\alpha_i}^{-1})(\mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

Así que solo hay que probar que $(\gamma_{u,v}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \pi_{\alpha_i}^{-1})(A) = \langle u, I_A(T_{\alpha_i}) v\rangle$ para todo $A \in B(\text{Spect } T_{\alpha_i})$.

Sea $u = v$, entonces

$$\begin{aligned}
\gamma_{u,v}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \pi_{\alpha_i}^{-1})(A) = \gamma_{u,u}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \pi_{\alpha_i}^{-1})(A) &= \gamma_{u,u}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}((\pi_{\alpha_i}^{-1})(A)) \\
&= \gamma_{u,v}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(\text{Spect } T_{\alpha_1} \times \cdots \times A \times \cdots \times \text{Spect } T_{\alpha_n}) \\
&= \langle u, I_A(T_{\alpha_i}) u\rangle
\end{aligned}$$

entonces con la identidad de polarización tenemos el caso cuando $u \neq v$ y por lo tanto

$$\langle u, \int\limits_{\Omega} \pi_{\alpha_i}(w) R(\mathrm{d}w) v\rangle = \int\limits_{\text{Spect } T_{\alpha_i}} x \langle u, I_{\mathrm{d}x}(T_{\alpha_i}) u\rangle = \langle u, T_{\alpha_i} v\rangle.$$

Sea $u = v \in \mathscr{H}$ con $\|u\| = 1$ fijo, definamos a $\mathcal{M}$ como:

$$\mathcal{M} = \{\gamma_{u,u}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n} : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \&\}$$

donde $\gamma_{u,u}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n} : B(\text{Spect } T_{\alpha_1} \times \cdots \times \text{Spect } T_{\alpha_n}) \to [0,1]$ es medida de probabilidad. Denotemos a $\text{Spect } T_{\alpha_1} \times \cdots \times \text{Spect } T_{\alpha_n}$ por Ω_G, donde $G = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, y a $\gamma_{u,u}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ por γ_G.

Por demostrar que $\mathcal{M}$ es un sistema proyectivo, basta probar que $\gamma_G(\pi_F^G)^{-1} = \gamma_F$ donde F, G son dos subconjuntos finitos de $\&$ y $\pi_F^G : \Omega_G \to \Omega_F$.

Sean $F, G \subset \&$ conjuntos finitos con $F \subset G$, sea $A \in B(\Omega_G)$, supongamos que $F = \{\beta_1, \dots, \beta_k\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ y $G = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n\}$, sea $A = a_1 \times \cdots \times A_k$ entonces

$$(\pi_F^G)^{-1}(A) = B_1 \times \cdots \times B_n$$

donde $B_i = A_j$ o $B_i = \text{Spect } T_{\alpha_i}$, por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
\gamma_G((\pi_F^G)^{-1}(A)) &= \langle u, I_{A_1}(T_{\alpha_1}) \cdots I_{A_k}(T_{\alpha_k}) u\rangle = \langle u, R_F(A_1 \times \cdots \times A_k) u\rangle \\
&= \langle u, R_F(A) u\rangle = \gamma_F(A)
\end{aligned}$$

Así se tiene que $\mathcal{M}$ es un sistema proyectivo.

Entonces por el Teorema de Kolmogorov existe una medida probabilidad; $S_u : \mathcal{C}(\Omega) \to [0, 1]$ donde $\Omega = \times \text{Spect } T_{\alpha_i}$, tal que $S_u \pi_G^{-1} = \gamma_G$.

Sean $u, v \in \mathscr{H}$ arbitrarios, si $u = v$ tenemos que $S_{u,u} := \|u\|^2 S_{\frac{u}{\|u\|}}$ y así definimos

$$S_{u,v} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^{-k} S_{u+i^k v, u+i^k v}.$$

Sea $R : \mathcal{C}(\Omega) \to \mathcal{P}(\mathscr{H})$, se define

$$\mathcal{P} = \{\pi_F^G(A) : G \subset \&, G \text{ finito}, A \in B(\Omega_G)\}$$

que es una álgebra que genera a $\mathcal{C}(\Omega)$. Sea

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{C}(\Omega) : R(A) \in \mathcal{P}(\mathscr{H}), \langle u, R(A)v \rangle = S_{u,v}(A) \ \forall u, v \in \mathscr{H}\}.$$

Por demostrar primero que $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ y después que $\mathcal{L}$ es un λ-sistema.

Para cada $\pi_G^{-1}(A)$, con G finito, se tiene que existe $R_G(A) \in B(\mathscr{H})$ tal que

$$\langle u, R_G(A)v \rangle = \gamma_{u,v}^G(A).$$

Supongamos que $u = v$, entonces $\gamma_{u,u}^G = S_{u,u}\pi_G^{-1}$, veamos que

$$\langle u, R(A)u \rangle = \gamma_{u,u}^G(A) = \gamma_{u,u}^G \pi_G^{-1}(A)$$

y además

$$\langle u, R_G(\pi_G^{-1}(A))u \rangle = \gamma_{u,u}^G \pi_G^{-1}(A)$$

Por lo tanto definimos

$$R_G(A) := R(\pi_G^{-1}(A))$$

Demostremos que esta bien definida.

Supongamos que $G \subset H$, se tiene que $\gamma_{u,u}^H = \gamma_{u,u}^G (\pi_G^H)^{-1}$ entonces

$$\begin{aligned} \gamma_{u,u}^H(B) &= \gamma_{u,u}^G((\pi_G^H)^{-1}(B)) \\ &= \gamma_{u,u}^G(A) \end{aligned}$$

esta ultima igualdad se debe al lo siguiente

$$\pi_H^{-1}(B) = \pi_G^{-1}(A) = (\pi_G^H \circ \pi_H)^{-1}(A) = \pi_H^{-1}((\pi_G^H)^{-1}(A))$$

por lo tanto $B = (\pi_G^H)^{-1}(A)$.

Así obtenemos que

$$\langle u, R_H(B)u \rangle = \langle u, R_G(A)u \rangle$$

Por lo que $R_H(B) = R_G(A)$.

Ahora considérense H, G generales, notemos que $\pi_G = \pi_G^{G\cup H} \circ \pi_{G\cup H}$ y $\pi_H = \pi_H^{G\cup H} \circ \pi_{G\cup H}$ entonces

$$\pi_{G\cup H}^{-1}(\pi_G^{G\cup H})^{-1}(A) = \pi_{G\cup H}^{-1}(\pi_H^{G\cup H})^{-1}(B)$$

por lo que se tiene que $(\pi_G^{G\cup H})^{-1}(A) = (\pi_H^{G\cup H})^{-1}(B)$. Como $R(\pi_G^{-1}(A)) = R_G(A)$ se tiene

$$R_G(A) = R_{G\cup H}((\pi_G^{G\cup H})^{-1}(A)) = R_{G\cup H}((\pi_H^{G\cup H})^{-1}(B)) = R_H(B).$$

Falta probar que $\langle u, R(A)u\rangle = S_{u,u}(A)\ \forall A \in \mathcal{P}$, pero esto de obtiene de

$$\langle u, R(\pi_G^{-1}(A))u\rangle = \langle u, R_G(A)u\rangle = \gamma_{u,u}^G(A) = S_{u,u}(\pi_G^{-1}(A)).$$

Por lo tanto $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$.

Para demostrar que $\mathcal{L}$ es un λ-sistema, se procede como en el paso 2.
Entonces para finalizar veamos lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle u, \int_\Omega \pi_{\alpha_i}(w)R(\mathrm{d}w)v\rangle &= \int_\Omega \pi_{\alpha_i}(w)\langle u, R(\mathrm{d}w)\rangle = \int_{\text{Spect } T_{\alpha_i}} x\mathrm{d}(S_{u,u}\pi_{\alpha_i}^{-1}(x)) \\ &= \int_{\text{Spect } T_{\alpha_i}} x\gamma_u^{\alpha_i}(\mathrm{d}x) = \langle u, T_{\alpha_i}u\rangle. \end{aligned}$$

$\square$

2.2. Medidas Gaussianas

2.2.1. Medidas Gaussianas Reales

1. Medida Gaussiana estándar en $\mathbb{R}$

$$\mu \ll \lambda \quad \frac{d\mu}{d\lambda}(z) = \frac{\exp\{-\frac{1}{2}z^2\}}{\sqrt{2\pi}}, \quad z \in \mathbb{R},$$

donde λ es la medida de Lebesgue. Notación: $\mu \sim N(0, 1)$

2. Medida Gaussiana estándar en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mu \ll \lambda \quad \tfrac{d\mu}{d\lambda}(Z) &= \tfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^n \exp\{-\tfrac{1}{2}z_i^2\} \\ &= \tfrac{\exp\{-\frac{1}{2}\|Z\|^2\}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \qquad \text{donde} \quad Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

3. Medida Gaussiana con parámetros $\beta \in \mathbb{N}$, $\sigma^2 > 0$.

$$\mu \ll \lambda \quad \frac{d\mu}{d\lambda}(z) = \frac{\exp\{-\frac{1}{2}(\frac{z-\beta}{\sigma})^2\}}{\sigma(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{donde} \quad z \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

Notación: $\mu \sim N(\beta, \sigma^2)$.

Definición 2.2.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad y $(E, \mathcal{E})$ un espacio medible y sea $T : \Omega \to E$ una transformación medible, entonces su *distribución es*

$$\mu_T = \boldsymbol{P} \circ T^{-1}.$$

Proposición 2.2.2. *Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una transformación dada por $T\zeta = \sigma\zeta + \beta,\ \sigma \neq 0$, entonces T es Borel-medible y la distribución de T, bajo la distribución gaussiana estándar, es la distribución gaussiana con parámetros β y σ^2.*

Demostración: En efecto:

$$\begin{aligned}
\mu_T((-\infty, a]) &= \mu_e(\{\zeta \in \mathbb{R} : T(\zeta) \leq a\}) \\
&= \mu_e(\{\zeta \in \mathbb{R} : \sigma\zeta + \beta \leq a\}) \\
&= \begin{cases} \mu_e(\{\zeta \in \mathbb{R} : \zeta \leq \frac{a-\beta}{\sigma}\}) & \text{si} \quad \sigma > 0 \\ \\ 1 - \mu_e(\{\zeta \in \mathbb{R} : \zeta \leq \frac{a-\beta}{\sigma}\}) & \text{si} \quad \sigma < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{a-\beta}{\sigma}} \frac{\exp\{-\frac{1}{2}(\zeta^2)\}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}\zeta & \text{si} \quad \sigma > 0 \\ \\ \displaystyle\int_{\frac{a-\beta}{\sigma}}^{\infty} \frac{\exp\{-\frac{1}{2}(\zeta^2)\}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}\zeta & \text{si} \quad \sigma < 0 \end{cases} \\
&= \int_{-\infty}^{a} \frac{\exp\{-\frac{1}{2}(\dfrac{\zeta - \beta}{\sigma})^2\}}{|\sigma|\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}\zeta
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu_T \ll \lambda$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}\mu_T}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\exp\{-\frac{1}{2}(\dfrac{\zeta - \beta}{\sigma})^2\}}{|\sigma|\sqrt{2\pi}}$$

así tenemos que $\mu_T \sim N(\beta, \sigma^2)$.

□

Observemos que:

1. Si $T\zeta = \beta$, entonces $\mu_T = \delta_\beta$. Por convención a δ_β también se le nombra gaussiana con parámetros β y 0.

Definición 2.2.3. $\mu : B(\mathbb{R}^n) \to [0, 1]$ es *medida Gaussiana si para todo $t \in \mathbb{R}^n$ la funcional $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\phi_t(x) = \langle t, x \rangle$ tiene distribución gaussiana en $\mathbb{R}$.*

Proposición 2.2.4. *Si $\mu : B(\mathbb{R}^n) \to [0,1]$ es gaussiana, entonces*

$$\hat{\mu}(t) = \exp\{i\langle t, m\rangle\} \exp\{-\frac{1}{2}\langle t, Ct\rangle\}$$

donde $m = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\beta_i = \boldsymbol{E}(\pi_i)$ y $C = (cov(\pi_i, \pi_j))_{i,j=1}^n$ con $cov(\pi_i, \pi_j) = \boldsymbol{E}(\pi_i - \beta_i)(\pi_j - \beta_j)$.

Teorema 2.2.5. *Sea $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n)), \mu_0$ un espacio de medida, donde μ_0 es la medida Gaussiana estándar, entonces una medida $\mu : B(\mathbb{R}^n) \to [0,1]$ es Gaussiana si y sólo si existen $m \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $Tz = Az + m$ tiene como distribución a μ, es decir $\mu_T(A) = \mu(A)$.*

Además $\mu_T \ll \lambda$ si y sólo si AA^*,(matriz de covarianza de la medida), es invertible.
Así la derivada de Radon-Nykodin es:

$$\frac{\mathrm{d}\mu_T}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\exp\{-\frac{1}{2}\langle \zeta, AA^*\zeta\rangle\}}{\sqrt{Det(AA^*)(2\pi)^{\frac{n}{2}}}}$$

Si AA^* no es invertible entonces $\mu_T \perp \lambda$.

Demostración: (Necesidad) Sea $\mu : B(\mathbb{R}^n) \to [0,1]$ una medida Gaussiana. Entonces $\mu_{\pi_i} : B(\mathbb{R}) \to [0,1]$ es gaussiana con parámetros (β_i, σ_i^2). Sea $m = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ y sea $C = (cov(\pi_i, \pi_j))_{i,j=1}^n$ donde

$$\begin{aligned} cov(\pi_i, \pi_j) &= \mathbf{E}(\pi_i - \beta_i)(\pi_j - \beta_j) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\pi_i - \beta_i)(\pi_j - \beta_j)\mu(\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Entonces C es no negativa definida, por lo tanto $A \in M_{n\times n}$ tal que $A^*A = C$ (por el Teorema espectral).

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Tz = Az + m$ por demostrar que $\mu_T = \mu$. Basta con demostrar que $\hat{\mu}_T = \hat{\mu}$, donde $\hat{\mu}_T$ es la transformada de Fourier de μ_T

2.2.2. Medidas Gaussianas complejas

Para ver mas detalles de esta seccion ver [17].

Definición 2.2.6. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad. Sea $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ una variable aleatoria, sea $X = Re(Z)$ y $Y = Im(Z)$. Decimos que Z tiene *distribución Gaussiana* si (X, Y) tiene distribución Gaussiana 2-dimensional.

Definición 2.2.7. Si Z es variable aleatoria Gaussiana con valores complejas decimos que Z es *circular simétrica* si para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$, se tiene que λZ tiene la misma distribución de Z.

Definición 2.2.8. *1.* $\boldsymbol{E}(Z) = \boldsymbol{E}(X) + i\boldsymbol{E}(Y)$

2. $K = \boldsymbol{E}[(Z - \boldsymbol{E}Z)\overline{(Z - \boldsymbol{E}Z)}] = \boldsymbol{E}|Z - \boldsymbol{E}Z|^2$ *(Varianza)*

3. $J = \boldsymbol{E}[(Z - \boldsymbol{E}Z)(Z - \boldsymbol{E}Z)] = \boldsymbol{E}(Z^2) - (\boldsymbol{E}Z)^2$ *(pseudo-covarianza)*

Sean $Z = (X, Y), [\mathbf{E}X, \mathbf{E}Y]$ y

$$\begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

Hay 5 parámetros $\mathbf{E}X, \mathbf{E}Y, VarX, VarY, Cov(X, Y)$, reales que determinan unívocamente a la distribución de (X, Y). Además queda bien determinada por estos 5 reales o por estos 3 complejos.

$$\begin{array}{l} \mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X) + i\mathbf{E}(Y) \\ K = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}X)^2 + (Y - \mathbf{E}Y)^2) = Var(X) + Var(Y) \\ J = Var(X) - Var(Y) + 2iCov(X, Y) \end{array}$$

Observemos que:

$$ReK = VarX + VarY$$

$$ReJ = VarX - VarY$$

Entonces

$$\mathbf{E}X = Re\mathbf{E}Z, \quad \mathbf{E}Y = Im\mathbf{E}Z;$$
$$VarX = \tfrac{ReK+ReJ}{2};$$

$$VarY = \tfrac{ReK-ReJ}{2}$$

$$Cov(X,Y) = \tfrac{ImJ}{2}$$

Teorema 2.2.9. *Sea $\zeta = X + iY$ una variable aleatoria Gaussiana compleja, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *ζ es circular simétrica.*

ii) $\boldsymbol{E}(\zeta) = \boldsymbol{E}(\zeta^2) = 0$

iii) $\boldsymbol{E}(\zeta) = 0,\ \boldsymbol{E}(X^2) = \boldsymbol{E}(Y^2)$ *y* $\boldsymbol{E}(XY) = 0.$

iv) *X, Y son variables aleatorias gaussianas centradas independientes e idénticamente distribuidas.*

Demostración: $i) \Rightarrow ii)$ Si $\zeta = X + iY$ es circular simétrica Gaussiana, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, $\lambda\zeta$ tiene la misma distribución que ζ. Entonces $\mathbf{E}(\lambda\zeta) = \mathbf{E}(\zeta)$ para toda $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$, por lo tanto $\mathbf{E}(\zeta) = 0$.
También se tiene, que puesto $|\lambda^2| = 1$, $\mathbf{E}(\lambda^2\zeta^2) = \mathbf{E}(\zeta^2)$ para toda $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$. Entonces $\mathbf{E}(\zeta^2) = 0$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Si $\mathbf{E}(\zeta) = 0$ entonces

$$0 = \mathbf{E}(\zeta^2) = \mathbf{E}(X^2 - Y^2) + 2i\mathbf{E}(XY)$$

Por lo tanto se tiene

$$\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(Y^2)$$

$$\mathbf{E}(XY) = 0$$

$iii) \Rightarrow iv)$ Como $\mathbf{E}(\zeta) = 0$ implica que $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 0$ así se obtiene que $Cov(X,Y) = \mathbf{E}(XY) = 0$, entonces (X,Y) es una vector gaussiano cuya matriz de covarianza es diagonal y por lo tanto X, Y son variables aleatorias gaussianas independientes.

$iv) \Rightarrow i)$ Como X, Y son v.a. gaussianas independientes entonces $\sigma^2 = \mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(Y^2)$ y por lo tanto (X,Y) es Gaussiano.
Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. Por demostrar que $\lambda\zeta$ tiene la misma distribución que ζ.
En efecto, si $\lambda = u + iv$ y $\zeta = X + iY$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda\zeta = (Re(\lambda\zeta), Im(\lambda\zeta)) &= (X,Y)\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} \\ &= (Xu - Yv, Xv + Yu) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda\zeta$ es gaussiana. Además $\mathbf{E}(\lambda\zeta) = \mathbf{E}Re(\lambda\zeta) + i\mathbf{E}Im(\lambda\zeta)$, entonces por demostrar que $\mathbf{E}(\lambda\zeta) = \mathbf{E}\zeta$. Solo basta probar que $(\mathbf{E}Re(\lambda\zeta), \mathbf{E}Im(\lambda\zeta)) = (\mathbf{E}Re(\zeta), \mathbf{E}Im(\zeta))$.
Como $\mathbf{E}[Xu - Yv] = u\mathbf{E}X - v\mathbf{E}Y$ y $\mathbf{E}[Xv + Yu] = v\mathbf{E}X + u\mathbf{E}Y$ se tiene que

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}Re(\lambda\zeta), \mathbf{E}Im(\lambda\zeta)) &= (u\mathbf{E}X - v\mathbf{E}Y, v\mathbf{E}X + u\mathbf{E}Y) \\ &= (\mathbf{E}X, \mathbf{E}Y)\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 2.2.10. *Sea $\zeta = X + iY$ circular simétrica, se define $H_\zeta = Span\{\zeta\} = \{c\zeta : c \in \mathbb{C}\}$, entonces H_X y H_Y son ortogonales, donde*

$$H_X = Span\{X\}$$
$$H_Y = Span\{Y\}$$

Demostración: Sean $u \in H_X, v \in H_Y$ entonces, como X, Y son v.a. reales se tiene

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})} &= \langle cX, dY\rangle &= \overline{c}d\langle X, Y\rangle \\ &= \overline{c}d\ \mathbf{E}(\overline{X}Y) &= \overline{c}d\ \mathbf{E}(XY) = 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.11. *Sea $A \in M_{\mathbb{C}}(1\times 1)$ positivo definida, es decir, $A = \sigma^2$, entonces existe ζ variable aleatoria gaussiana circular compleja tal que $Var\zeta = \sigma^2$*

Demostración: Sea $A = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$, sea $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ gaussiana centrada con matriz de covarianza A, entonces existe $(\frac{X}{\sqrt{2}}, \frac{Y}{\sqrt{2}}) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.
Ahora sea $\zeta = \frac{X+iY}{\sqrt{2}}$ por construcción ζ es circular, por lo tanto

$$Var\zeta = Var\frac{X}{\sqrt{2}} + Var\frac{Y}{\sqrt{2}} = \sigma^2.$$

□

Se tiene una observación $H_\zeta \subset H_X \oplus H_Y$.

Proposición 2.2.12. *Sea $\zeta : \Omega \to \mathbb{C}$ una variable aleatoria Gaussiana compleja circular simétrica, entonces existe $c \in \mathbb{C}$, existe una función $\zeta_0 : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $\zeta_0 = X_0 + iY_0$ donde (X_0, Y_0) es Gaussiana estándar en $\mathbb{R}^2$ y $\zeta = c\zeta_0$.*

Demostración: Sea $\zeta = X + iY$, sea $c = \sqrt{VarX} = \sqrt{VarY} \geq 0$, entonces

i) Si $c = 0$, entonces $X = Y = 0$ así $\zeta = 0\zeta_0$

ii) Sea $c \neq 0$, sea $\zeta_0 = \frac{X}{c} + i\frac{Y}{c} = \frac{\zeta}{c}$, entonces $\zeta = c\ \zeta_0$, ahora como $\frac{X}{c} \sim N(0, 1)$ y $\frac{Y}{c} \sim N(0, 1)$, además X, Y son independientes se tiene que $(\frac{X}{c}, \frac{Y}{c}) \sim N(0, I)$ en $\mathbb{R}^2$

□

Sea $(X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio Gaussiano centrado. Sea C la matriz de covarianza, es decir, $c_{i,j} = \mathbf{E}(X_iX_j)$. Sea $A : \mathbb{R}^\ltimes \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, así

$A = (a_{ij}) \in M_{\mathbb{R}}(m \times n)$. Se sabe que AX es vector Gaussiano centrado con matriz de covarianza

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(AX)_j(AX)_k &= \mathbf{E}\{\sum_l a_{il}X_l\}\{\sum_m a_{km}X_m\} \\
&= \sum_l \sum_m a_{jl}a_{km}\mathbf{E}(X_lX_m) \\
&= \sum \sum a_{jl}c(l,m)a_{km} \\
&= \sum_l a_{jl}\{\sum_m c(l,m)A^{\perp}_{mk}\} \\
&= \sum a_{jl}\{CA^{\perp}\}_{lk} \\
&= (ACA^{\perp})_{jk}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $Cov(AX) = ACA^{\perp}$.

□

Sea $\zeta : \Omega \to \mathbb{C}$ Gaussiana. Consideremos $\mathbf{E}\zeta$, $K = \mathbf{E}|\zeta - \mathbf{E}\zeta|^2$, $J = \mathbf{E}(\zeta - \mathbf{E}\zeta)^2$.

Definición 2.2.13. Sea $\zeta : \Omega \to \mathbb{C}^n$, se dice que ζ es *vector Gaussiano* si $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ con $\zeta_j = X_j + Y_j$, entonces $(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n)$ es Gaussiano real.

La matriz de covarianza $K = \mathbf{E}(\zeta - \mathbf{E}\zeta)(\zeta - \mathbf{E}\zeta)^*$ es un elemento de $M_{\mathbb{C}}(n \times n)$, donde

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}, \qquad \zeta^* = (\overline{\zeta}_1, \ldots, \overline{\zeta}_n)$$

Se entiende que $\mathbf{E}$, se toma en cada entrada de la matriz.

La matriz de pseudo-varianza, $J = \mathbf{E}(\zeta - \mathbf{E}\zeta)(\zeta - \mathbf{E}\zeta)^{\perp}$, donde $\zeta^{\perp} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$.

Definición 2.2.14. Sea $\zeta : \Omega \to \mathbb{C}^n$ vector aleatorio cualquiera.

i) Decimos que es *isotrópico* si $U\zeta$ tiene la misma distribución que ζ para todo $U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ operador lineal unitario, es decir, $U^*U = I = UU^*$

ii) Decimos que $\zeta : \Omega \to \mathbb{C}^n$ es *circular simétrica* si para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{i\theta}\zeta$ tiene la misma distribución que ζ.

Observación: Si ζ es isotrópica, entonces es circular simétrica pero el reciproco en general es falso a menos que $n = 1$.

Proposición 2.2.15. *Sea $C \in M_{\mathbb{C}}(n \times n)$ positiva definida, entonces existe $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ espacio de probabilidad y $\xi : \Omega \to \mathbb{C}^n$ variable Gaussiana centrada tal que $K_\xi = C$.*

Demostración: Como C es positiva definida, existe $A \in M_{\mathbb{C}}(n \times n)$ tal que $C = AA^*$, sea $\zeta : \Omega \to \mathbb{C}^n$ Gaussiana estándar, sea $\xi = A\zeta$, entonces ξ es Gaussiana centrada y por lo tanto

$$K_\xi = AIA^* = AA^* = C.$$

□

2.3. Pares de Gelfand

Definición 2.3.1. Sea $\mathcal{H}$ cualquier conjunto, sea $K : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, decimos que K es *kernel positivo definido* si para toda $n \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathcal{H}$, la matriz de $n \times n$, $(K(k_i, k_j))_{i,j=1}^n$ es positiva definida, es decir para todo $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $x_i \in \mathcal{H}$ satisface:

$$\sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \alpha_j K(x_i, x_j) \geq 0.$$

Como ejemplos tenemos:

- Si $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert y $\mathcal{H} = \mathscr{H}$, sea $K : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ dada por $K(u, v) = \langle u, v \rangle$.
- Si $\{X_t\}_{t \in T}$ es un proceso estocástico, en el sentido clásico, con segundo momento entonces si $\mathcal{H} = T$ sea $K : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ dada por $K(t, s) = cov(X_t, X_s)$.
- Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, sea ρ un estado en $\mathscr{H}$, entonces $K(X, Y) = Tr\rho X^* Y$ es un kernel positivo sobre $B(\mathscr{H})$.

Se denota por $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ al conjunto de todos los kernels positivo definido sobre $\mathcal{H}$.

Lema 2.3.2. *(Lema de Schur) Sean $A, B \in M_{\mathbb{C}}(n \times n)$ dos matrices positivo definidas. Sea C otra matriz definida como $C(i,j) = A(i,j)B(i,j)$, entonces C es positiva definida.*

Demostración: Sea $A = ((a_{ij}))$. Se puede escoger cualquier matriz de tamaño $n \times n$ tal que $CC^* = A$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ cualquier $2n$ variables aleatorias gaussianas estándar independientes idénticamente distribuidas. Se puede escribir $\gamma_j = 2^{-\frac{1}{2}}(\alpha_j + i\beta_j)$, $\underline{\xi} = C\underline{\gamma}$ donde $\underline{\gamma}$ es el vector columna con entrada j-ésima γ_j. Entonces $\underline{\xi}$ es un vector aleatorio gaussiano complejo-valuado tal que $\mathbf{E}\underline{\xi} = \underline{0}$, $\mathbf{E}\underline{\xi}\underline{\xi}^* = CC^* = A$.
De la misma forma si $B = ((bij))$, tenemos a $\underline{\eta}$ tal que $\mathbf{E}\underline{\eta} = \underline{0}$, $\mathbf{E}\underline{\eta}\underline{\eta}^* = DD^* = B$ donde D es cualquier matriz de tamaño $n \times n$ tal que $DD^* = B$.

Así se pueden escoger a $\underline{\xi}, \underline{\eta}$ como vectores aleatorios gaussianos independientes complejos, tal que $\mathbf{E}\xi_j = \mathbf{E}\eta_j = 0$, $\mathbf{E}\overline{\xi}_i\xi_j = a_{ij}$ y $\mathbf{E}\overline{\eta}_i\eta_j = b_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq n$. Sea $\zeta_j = \xi_j\eta_j$. Entonces $\mathbf{E}\zeta_j = 0$, $\mathbf{E}\overline{\zeta}_i\zeta_j = a_{ij}b_{ij}$. Por lo tanto $((a_{ij}b_{ij}))$ es la matriz de covarianza del vector aleatorio $\underline{\zeta}$ y por lo tanto es positiva definida.

□

Corolario 2.3.3. *El espacio $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ de todos los kernels sobre $\mathcal{H}$ es cerrado bajo la multiplicación puntual.*

Demostración: Esto se sigue de la Proposición anterior y del hecho de que K es un kernel positivo sobre $\mathcal{H}$ si y solo si para cualquier conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathcal{H}$ la matriz $((a_{ij}))$ donde $a_{ij} = K(i, j)$ es positivo definido.

$\square$

Corolario 2.3.4. *Sean $\mathcal{H}_i, 1 \leq i \leq n$ conjuntos y sean $K_i \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_i)$ para cada i. Se define $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n$ y*

$$K(\underline{x}, \underline{y}) = \prod_{i=1}^{n} K_i(x_i, y_i), \;\; \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \;\; \underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$$

donde $x_i, y_i \in \mathcal{H}_i$. Entonces $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Demostración: Sea $\underline{x}^{(}r) = (x_{1r}, x_{2r}, \ldots, x_{nr}) \in \mathcal{H}$, $1 \leq r \leq m$. Haciendo $a^i_{rs} = K_i(x_{ir}, x_{is})$ se observa que

$$K(\underline{x}^{(}r), \underline{x}^{(}s)) = \prod_{i=1}^{n} a^i_{rs}.$$

por lo tanto $((a^i_{rs}))$, $1 \leq r, s \leq m$ es positiva definida para cada i fija y por la Proposición anterior se obtiene lo deseado.

$\square$

Proposición 2.3.5. *(Pares de Gelfand) Sea $\mathcal{H}$ cualquier conjunto y sea $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Entonces existe un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ (no necesariamente separable) y una transformación $\lambda : \mathcal{H} \to \mathscr{H}$ tal que:*

i) El conjunto $\lambda(\mathcal{H})$ es total en $\mathscr{H}$, es decir $\overline{Span(\lambda(\mathcal{H}))} = \mathscr{H}$;

ii) $K(x, y) = \langle \lambda(x), \lambda(y) \rangle_{\mathscr{H}}$ para todo $x, y \in \mathscr{H}$.

Si $\mathscr{H}'$ es otro espacio de Hilbert y $\lambda' : \mathcal{H} \to \mathscr{H}'$ es otra transformación que cumple con i) y ii), entonces existe un isomorfismo unitario $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H} \arrow[r, "U"] & \mathscr{H}' \\ \mathcal{K} \arrow[u, "\lambda"] \arrow[ur, "\lambda'"'] & \end{tikzcd}$$

es decir $U\lambda(x) = \lambda'(x)$.

Demostración: Para cualquier conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathcal{H}$ se sigue de los argumentos de la prueba del Corolario (2.3.3) y del Lema (2.3.2), que existe un vector aleatorio gaussiano complejo $(\zeta^F_1, \zeta^F_2, \ldots, \zeta^F_n)$ tal que

$$\mathbf{E}\overline{\zeta^F_i}\zeta^F_j = K(x_i, x_j), \;\; \mathbf{E}\zeta^F_i = 0, \, 1 \leq i, j \leq n.$$

Si $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\} \supset F$ entonces la distribución marginal de $(\zeta_1^G, \ldots, \zeta_n^G)$ derivada de $(\zeta_1^G, \ldots, \zeta_n^G, \zeta_{n+1}^G)$ es la misma que la distribución de $(\zeta_1^F, \ldots, \zeta_n^F)$. Por lo tanto por el Teorema de Consistencia de Kolmogorov existe una familia gaussiana de variables aleatorias complejo-valuadas $\{\zeta_x : x \in \mathcal{H}\}$ sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tal que

$$\mathbf{E}\zeta_x = 0, \;\; \mathbf{E}\overline{\zeta_x}\zeta_y = K(x, y) \text{ para todo } x, y \in \mathcal{H}.$$

Si $\mathscr{H}$ es el espacio lineal cerrado generado por $\{\zeta_x : x \in \mathcal{H}\}$ en $L^2(\mathbf{P})$ y $\lambda(x) = \zeta_x$ entonces se tiene lo pedido.

Por último sean $\lambda(\mathcal{H})$, $\lambda'(\mathcal{H})$ y considérese la transformación $U : \lambda(\mathcal{H}) \to \lambda'(\mathcal{H})$. Entonces U preserva el producto interior y además $\lambda(\mathcal{H})$ y $\lambda'(\mathcal{H})$ son totales en $\mathscr{H}, \mathscr{H}'$ respectivamente. Por lo tanto existe una única extensión lineal $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$.

□

El par $(\mathscr{H}, \lambda)$ determinado únicamente bajo isomorfismos unitarios por el kernel K sobre $\mathcal{H}$ se le llama *par de Gelfand* asociado a K.

2.4. Productos Tensoriales de espacios de Hilbert finitos y estabilizado

Se introducirá la noción de *producto tensorial de espacios de Hilbert* usando la Proposición (2.3.5). Sea $\mathscr{H}_i$ $1 \leq i \leq n$ espacios de Hilbert y sea $\mathcal{H} = \mathscr{H}_1 \times \cdots \times \mathscr{H}_n$ su producto cartesiano. Entonces la función $K_i(u, v) = \langle u, v\rangle$ con $u, v \in \mathscr{H}_i$, es un kernel positivo definido sobre $\mathscr{H}_i$ para cada i. Por el Corolario (2.3.4) la función

$$K(\underline{u}, \underline{v}) = \prod_{i=1}^{n} K_i(u_i, v_i), \text{ donde } \underline{u} = (u_1, \ldots, u_n), \underline{v} = (v_1, \ldots, v_n).$$

con $u_i, v_i \in \mathscr{H}_i$ para cada i, es un kernel sobre $\mathscr{H}$. Considérese cualquier par de Gelfand $(\mathscr{H}, \lambda)$ asociado a K y que satisfaga (i) y (ii) de la Proposición (2.3.5). Entonces $\mathscr{H}$ es llamado un *producto tensorial* de $\mathscr{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y se denota mediante

$$\mathscr{H} := \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathscr{H}_n := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{H}_i$$

$$\lambda(\underline{u}) =: u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n =: \bigotimes_{i=1}^{n} u_i$$

en este caso a $\lambda(\underline{u})$ se le llama *producto tensorial de los vectores* u_i, $1 \leq i \leq n$. Si $\mathscr{H}_i = h$ para todo i entonces $\mathscr{H}$ es llamado el *n-ésimo producto tensorial de* h y es dentado por $h^{\otimes^n}$. De la misma manera si $u_i = u$ para toda i, entonces $\lambda(\underline{u})$ se llama la *n-ésima potencia de* u y se denota por $u^{\otimes^n}$.

Proposición 2.4.1. *La transformación* $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \to u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n$ *de* $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \times \cdots \times \mathscr{H}_n$ *en* $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathscr{H}_n$ *definido como arriba, es multilineal: para todo escalar* α, β

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_{i-1} \otimes (\alpha u_i + \beta v_i) \otimes \cdots \otimes u_n$$

$$= \alpha u_1 \otimes \cdots u_n + \beta u_1 \otimes \cdots \otimes u_{i-1} \otimes v_i \otimes \cdots \otimes u_n$$

Más aún

$$\langle \bigotimes_{i=1}^{n} u_i, \bigotimes_{i=1}^{n} v_i \rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i \rangle.$$

El conjunto $\{\bigotimes_{i=1}^{n} u_i : u_i \in \mathscr{H}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ *es total en* $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{H}_i$

Definición 2.4.2. (Producto tensorial estabilizado) Se introducirá un nuevo espacio, sea $\mathscr{H}_n, n = 1, 2, \ldots$ una sucesión de espacios de Hilbert y sea $\{\phi_n\}$ una sucesión de vectores unitarios donde $\phi_n \in \mathscr{H}_n$ para cada n. Supóngase que

$$M = \{\underline{u} | \underline{u} = (u_1, u_2, \ldots), u_j \in \mathscr{H}_j, u_n = \phi_n, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \ \forall n \geq n_0\}.$$

Se define $K(\underline{u}, \underline{v}) = \prod_{j=1}^{\infty} \langle u_j, u_j \rangle > 0$ para $\underline{u}, \underline{v} \in M$. Se puede probar que K es un kernel positivo definido sobre M. El espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ en el par de Gelfand $(\mathscr{H}, \lambda)$ asociado a K es llamado *el producto tensorial numerable* de la sucesión $\{\mathscr{H}_n\}$ con respecto a la *sucesión estabilizante* $\{\phi_n\}$. Se denota $\lambda(\underline{u}) =: u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots$ para todo $\underline{u} \in M$.
Supóngase que $\{e_{n0}, e_{n1}, \ldots\} = S_n$ es una base ortonormal en $\mathscr{H}_n$ tal que $e_{n0} = \phi_n$ para cada n. Entonces el conjunto $\{\lambda(\underline{u}) | \underline{u} \in M, u_j \in S_j, \ \text{para cada } j\}$ es una base ortonormal en $\mathscr{H}$.

Capítulo 3

Esperanza Condicional Cuántica

En este capitulo sigue basado en el libro de Parthasarathy [12], donde se introduce la noción de esperanza condicional en productos tensoriales de espacios de Hilbert.

3.1. Operadores en Productos Tensoriales de espacios de Hilbert

Sea $\mathscr{H}_i$ un espacio de Hilbert de dimensión finita m_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ y sea $\mathscr{H} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{H}_i$. Supóngase que T_i es un operador autoadjunto en $\mathscr{H}_i$ con valores propios $\{\lambda_{ij}, 1 \leq j \leq m_i\}$ y su correspondiente conjunto ortonormal de vectores propios $\{e_{ij}, 1 \leq j \leq m_i\}$ tal que

$$T_{ij}e_{ij} = \lambda_{ij}e_{ij}, \;\; 1 \leq j \leq m_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Entonces se define un operador autoadjunto T sobre $\mathscr{H}$ dado por

$$T \bigotimes_{i=1}^{n} e_{ij} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \bigotimes_{i=1}^{n} e_{ij}, \;\; 1 \leq j_i \leq m_i$$

y es extendiendo linealmente sobre todo $\mathscr{H}$. El operador T tiene valores propios $\prod_{i=1}^{n} \lambda_{ij_i}$, $1 \leq j_i \leq m_i$ y satisface

$$T \bigotimes_{i=1}^{n} u_i = \bigotimes_{i=1}^{n} T_i u_i \text{ para todo } \;\; u_i \in \mathscr{H}_i, i \leq i \leq n.$$

Además

$$\begin{aligned} \|T\| &= \text{máx}(|\prod_{i=1}^{n} \lambda_{ij}|, 1 \leq j_i \leq m_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \text{máx}(|\lambda_{ij}|, 1 \leq j \leq m_i) \\ &= \textstyle\prod_{i=1}^{n} \|T_i\|. \end{aligned}$$

En particular, se tiene la identidad

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{1\leq j,k\leq N}\overline{a}_j\alpha_k\prod_{i=1}^{n}\langle u_{ij},T_iu_{ik}\rangle\Big| &= \Big|\langle\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\bigotimes_{i=1}^{n}u_{ij},T\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\bigotimes_{i=1}^{n}u_{ij}\rangle\Big| \\ &\leq \prod_{i=1}^{n}\|T_i\|\|\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\bigotimes_{i=1}^{n}u_{ij}\|^2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

para todos los escalares α_j, $u_{ij}\in\mathscr{H}_i$, $1\leq j\leq N$, $1\leq i\leq n$, $N=1,2,\ldots$. Se escribe $T=\bigotimes_{i=1}^{n}T_i=T_1,\otimes\cdots\otimes T_n$ y se llama *producto tensorial de los operadores* T_i, $1\leq i\leq n$.

Proposición 3.1.1. *Sean $\mathscr{H}_i$, $1\leq i\leq n$ espacios de Hilbert y sea T_i un operador acotado en $\mathscr{H}_i$ para cada i. Entonces existe un único operador acotado T en $\mathscr{H}=\bigotimes_{i=1}^{n}\mathscr{H}_i$ satisfaciendo:*

$$T\bigotimes_{i=1}^{n}u_i=\bigotimes_{i=1}^{n}T_iu_i \ \textit{para todo}\ u_i\in\mathscr{H}_i, i\leq i\leq n. \tag{3.2}$$

Además $\|T\|=\prod_i\|T_i\|$.

Demostración: Sea $S=\{\bigotimes_{i=1}^{n}u_i : u_i\in\mathscr{H}_i, 1\leq i\leq n\}$. Para todo escalar α_j, $1\leq j\leq N$ y productos vectores $\bigotimes_{i=1}^{n}u_{ij}\in S$, $1\leq j\leq N$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\bigotimes_{i=1}^{n}T_iuij\|^2 &= \sum_{1\leq i,j\leq N}\overline{\alpha}_j\alpha_k\prod_{i=1}^{n}\langle u_{ij},T_i^*T_iu_{ij}\rangle \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq N}\overline{\alpha}_j\alpha_k\prod_{i=1}^{n}\langle u_{ij},P_iT_i^*T_iP_iu_{ij}\rangle \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde P_i es la proyección sobre el subespacio finito dimensional M_i generado por $\{u_{ij}, i\leq j\leq N\}$ en $\mathscr{H}_i$ para cada i. por lo que $P_iT_i^*T_iP_i$ es una operador positivo en M_i, de las ecuaciones (3.1) y (3.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \|\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\bigotimes_{i=1}^{n}T_iuij\|^2 &\leq \prod_{i=1}^{n}\|P_iT_i^*T_iP_i\|\|\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\bigotimes_{i=1}^{n}u_{ij}\|^2 \\ &\leq \prod_{i=1}^{n}\|T_i^*T_i\|\|\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\bigotimes_{i=1}^{n}u_{ij}\|^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

se define T sobre el conjunto S por la igualdad (3.2). Entonces por la desigualdad (3.4) muestra que que T puede extenderse de manera única a una transformación lineal sobre el campo generado por S. Por lo tanto S es total en $\mathscr{H}$ esta extensión puede definir un operador acotado T sobre $\mathscr{H}$ que satisface

$$\|T\|\leq\prod_{i=1}^{n}\|T_i^*T_i\|^{\frac{1}{2}}=\prod_{i=1}^{n}\|T_i\|.$$

Por último, sea $0 < \epsilon < 1$ arbitrario. Elegimos vectores unitarios $u_i \in \mathscr{H}_i$ tal que $\|T_i u_i\| \geq (1-\epsilon)\|T_i\|$ para cada i, asumimos que $T - i \neq 0$. Entonces $\bigotimes_{i=1}^n u_i$ es in vector unitario en $\mathscr{H}$ y

$$\|T \bigotimes_{i=1}^{n} u_i\| = \| \bigotimes_{i=1}^{n} T_i u_i\| = \prod_{i=1}^{n} \|T_i u_i\| \geq (1-\epsilon)^n \prod_{i=1}^{n} \|T_i\|.$$

Pro lo tanto $\|T\| \geq \prod_{i=1}^{n} \|T_i\|$.

$\square$

El operador T determinado en (3.1.1) es llamado *producto tensorial* de los operadores T_i, $1 \leq i \leq n$. Se denota por $T = \bigotimes_{i=1}^{n} T_i = T_1, \otimes \cdots \otimes T_n$. Si $T_i = S$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$, se denota por $T = S^{\otimes^n}$ y es llamado la *n-ésima potencia* del operador S.

Proposición 3.1.2. *Sea $\mathscr{H}_i$, $1 \leq i \leq n$ espacios de Hilbert y sean S_i, T_i operadores acotados en $\mathscr{H}_i$ para cada i. Sea $S = \bigotimes_{i=1}^{n} S_i$, $T = \bigotimes_{i=1}^{n} T_i$. Entonces las siguientes condiciones se cumplen:*

1. *La transformación $(T_1, T_2, \ldots, T_n) \to T$ es multilineal de $B(\mathscr{H}_1) \times \cdots \times B(\mathscr{H}_n)$ en $B(\mathscr{H}_1 \times \cdots \times \mathscr{H}_n)$;*

2. *$ST = \bigotimes_{i=1}^{n} S_i T_i$, $T^* = \bigotimes_{i=1}^{n} T_i^*$;*

3. *Si cada T_i tiene un inverso acotado, entonces T también tiene un inverso acotado, además $T^{-1} = \bigotimes_i T_i^{-1}$;*

4. *T es un operador autoadjunto, unitario, normal o una proyección si cada T_i es un operador autoadjunto, unitario, normal o una proyección.*

5. *T es positivo si cada T_i es positivo.*

6. *Si $T_i = |u_i\rangle\langle v_i|$ donde $u_i, v_i \in \mathscr{H}_i$ para cada i entonces*

$$T = |u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \overline{u}_n\rangle\langle v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n|.$$

Proposición 3.1.3. *Sea T_i un operador compacto en $\mathscr{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathscr{H} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{H}_i$, $T = \bigotimes_{i=1}^{n} T_i$. Si T_i tiene la descomposición canónica en el sentido de la Proposición (1.1.7), (ver apéndice),*

$$T_i = \sum_j s_j(T_i)|v_{ij}\rangle\langle u_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

entonces T es un operador compacto con descomposición canónica

$$T = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} s_{j_1}(T_1) \cdots s_{j_n}(T_n)|v_1 j_1 \otimes \cdots \otimes v_n j_n\rangle\langle u_1 j_1 \otimes \cdots \overline{u}_n j_n|.$$

Si $T_i \in I(\mathscr{H}_i)$ para cada i entonces $T \in I_1(\mathscr{H})$ y

$$\|T\|_1 = \prod_{i=1}^{n} \|T_i\|_1. \quad \mathbf{tr}T = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{tr}T_i.$$

En particular, si cada T_i es un estado entonces T también lo es.

Si $(B(\mathscr{H}_i), \rho_i)$, $i = 1, \ldots, n$ es un espacio de probabilidad cuántico para cada i, entonces haciendo $\mathscr{H} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{H}_i$, $\rho = \bigotimes_{i=1}^{n} \rho_i$ se obtiene un nuevo espacio de probabilidad cuántico $(B(\mathscr{H}), \rho)$ llamado el *producto* de los espacios de probabilidad cuánticos $(B(\mathscr{H}_i), \rho_i)$,$i = 1, 2, \ldots, n$..

Proposición 3.1.4. *Cada elemento P en $\mathcal{P}(\mathscr{H})$ puede ser obtenido como un limite fuerte de combinaciones lineales de proyecciones de la forma $\bigotimes P_i$, $P_i \in \mathcal{P}(\mathscr{H})$.*

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo separable y sea $\mathcal{P}(\mathscr{H})$ el conjunto de las proyecciones ortogonales en $\mathscr{H}$.

Proposición 3.1.5. *Sea $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ espacios medibles y sea $\xi_i : \mathcal{F}_i \to \mathcal{P}(\mathscr{H}_i)$ una resolución de la identidad en $\mathcal{F}_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $(\Omega, \mathcal{F}) = \prod_{i=1}^{n} (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ el producto de espacios medibles y $\mathscr{H} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{H}_i$. Entonces existe un única resolución de la identidad $\xi : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(\mathscr{H})$ tal que*

$$\xi(F_1 \times \cdots \times F_n) = \bigotimes_{i=1}^{n} \xi_i(F_i) \quad \textit{para todo} \quad E \in \mathcal{F}_i, \ 1 \le i \le n.$$

Proposición 3.1.6. *Sean $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ espacios de Hilbert y sea T un operador de traza finita en $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$. Entonces existe un único operador de traza finita T_1 un $\mathscr{H}_1$ tal que*

$$\mathbf{tr}T_1 X = \mathbf{tr}T(X \otimes 1) \ \textit{para todo} \ X \in B(\mathscr{H}_1). \tag{3.5}$$

Si T es un estado entonces T_1 es un estado en $\mathscr{H}_1$.

Demostración: Para cualquier operador compacto, $X \in B(\mathscr{H}_1)$, se define $\lambda(X) = \mathbf{tr}T(X \otimes 1)$. Como $\sup_{\|X\|=1} |\mathbf{tr}TX| = \|T\|_1$, entonces se tiene que $|\lambda(X)| \le \|T\|_1 \|X\|$. En particular, λ es un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{I}_\infty(\mathscr{H}_1)$. Por el teorema de Schatten (ver apéndice) existe $T_1 \in \mathcal{I}_1(\mathscr{H}_1)$ tal que $\mathbf{tr}T_1 X = \mathbf{tr}T(X \otimes 1)$ para todo X en $\mathcal{I}_\infty(\mathscr{H}_1)$. Por lo tanto las transformaciones $X \mapsto \mathbf{tr}T_1 X$ y $X \mapsto \mathbf{tr}T(X \otimes 1)$ son fuertemente continuos en $B(\mathscr{H}_1)$ así se obtiene la igualdad (3.5). Si T es positivo entonces se obtiene

$$\langle u, T_1 u\rangle = \mathbf{tr}T_1 |u\rangle\langle u| = \mathbf{tr}T(|u\rangle\langle u| \otimes 1) \ge 0$$

para todo $u \in \mathscr{H}_1$. Por lo tanto $T_1 \geq 0$. Haciendo $X = 1$ en la ecuación (3.5) se obtiene que $\mathbf{tr}T_1 = \mathbf{tr}T$. Por lo tanto T_1 es un estado si T es un estado.

$\square$

El operador T_1 en la ecuación (3.5) es llamado la *traza parcial* de T en $\mathscr{H}_1$.
Si T es un estado entonces la traza parcial de T_1 es el análogo de la distribución marginal en la probabilidad clásica, pero que quede claro que la traza parcial no es una generalización de la distribución marginal. Veamos cómo se entiende que la traza parcial es el análogo de la distribución marginal:

Observación 3.1.7. i) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad y sea $\mathscr{H} = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de Hilbert, sea $\mathcal{A} = L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \subset B(H)$, se puede probar que $\rho = |1\rangle\langle 1|$ con $1 \in \mathscr{H}$ es un estado.

Si se toma un operador de multiplicación digamos $A = m_f$ con $f \in \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{tr}(\rho A) &= \mathbf{tr}(|1\rangle\langle 1|A) = \mathbf{tr}(A|1\rangle\langle 1|) = \mathbf{tr}(|A1\rangle\langle 1|) \\ &= \langle 1, A1\rangle = \langle 1, m_f 1\rangle = \langle 1, f\rangle = \int f \mathrm{d}\mathbf{P}. \end{aligned}$$

ii) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \gamma)$ un espacio de medida y sea $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ una medida que es absolutamente continua respecto a γ ($\mu \ll \gamma$). Sea la derivada de Radon-Nykodin $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\gamma} = g \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \gamma)$ así $g^{\frac{1}{2}} \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \gamma)$. Por lo tanto $\sigma = |g^{\frac{1}{2}}\rangle\langle g^{\frac{1}{2}}|$ es un estado. Consideremos un operador de multiplicación $A = m_f \in B(L_\infty)$, $f \in L_\infty$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{tr}(\sigma A) &= \mathbf{tr}(|g^{\frac{1}{2}}\rangle\langle g^{\frac{1}{2}}|A) = \mathbf{tr}(A|g^{\frac{1}{2}}\rangle\langle g^{\frac{1}{2}}|) = \mathbf{tr}(|Ag^{\frac{1}{2}}\rangle\langle g^{\frac{1}{2}}|) \\ &= \langle g^{\frac{1}{2}}, Ag^{\frac{1}{2}}\rangle = \langle g^{\frac{1}{2}}, m_f g^{\frac{1}{2}}\rangle = \langle g^{\frac{1}{2}}, f g^{\frac{1}{2}}\rangle = \int g f \mathrm{d}\gamma. \end{aligned}$$

Observación 3.1.8. Ahora sean $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \gamma_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \gamma_2)$ espacios de probabilidad, y sea $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \gamma_1 \otimes \gamma_2)$ espacio producto, entonces dados $u \in L_2(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \gamma_1), v \in L_2(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \gamma_2$, la asociación $u \otimes v \mapsto u(x)v(y)$ se puede probar que se extiende a un isomorfismo entre los espacios

$$L_2(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \gamma_1 \otimes \gamma_2) \cong L_2(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \gamma_1) \otimes L_2(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \gamma_2)$$

Observación 3.1.9. Consideremos los siguientes espacios de Hilbert, $\mathscr{H} = L_2(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \gamma_1 \otimes \gamma_2)$, $\mathscr{H}_1 = L_2(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \gamma_1)$, $\mathscr{H}_2 = L_2(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \gamma_2)$
Ahora tomemos una medida de probabilidad $\mu : \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \to [0, 1]$ tal que $\mu \ll \gamma_1 \otimes \gamma_2$, sea la derivada de Radon-Nykodin $g = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\gamma_1 \otimes \gamma_2}$, así $g^{\frac{1}{2}} \in L_2(\gamma_1 \otimes \gamma_2)$. Sea $\gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathbb{R}$, $\gamma(A) = \mu(A \times \Omega_2)$ la *distribución marginal* , además $\gamma \ll \gamma_1$, $z(x) = \frac{\mathrm{d}\gamma(x)}{\mathrm{d}\gamma_1} = \int_{\Omega_2} g(x, y)\mathrm{d}\gamma_2(y)$.

Tomemos el estado $\rho = |g^{\frac{1}{2}}\rangle\langle g^{\frac{1}{2}}|$ ahora calculamos la traza parcial T_1 de ρ.

Proposición 3.1.10. *Sea* $a \in \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ *y sea* $b \in \mathscr{H}_1$ *con* $\|b\| = 1$ *tal que* $|b\rangle\langle b| = \mathbf{tr}_1|a\rangle\langle a|$, *entonces existe* $c \in \mathscr{H}_2$ *tal que* $a = b \otimes c$.

Proposición 3.1.11. La traza parcial de ρ es el estado inducido por la densidad marginal de μ si y sólo si $g(x,y) = z(x)h(y)$ donde $h(y)$ es la densidad marginal en Ω_2.

Proposición 3.1.12. *Sean $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ espacios de Hilbert y $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$. Entonces la $*$-álgebra generada por $\{X_1 \otimes X_2 |\ X_i \in B(\mathscr{H}_i), i = 1, 2\}$ es fuertemente densa en $B(\mathscr{H})$.*

Demostración: Se encuentra en [16].

$\square$

Proposición 3.1.13. *Para cualquier operador de traza finita ρ en $\mathscr{H}_2$ existe una única transformación lineal $\mathbb{E}_\rho : \mathcal{B}(\mathscr{H}) \to B(\mathscr{H}_1)$ que satisface*

$$\langle u, \mathbb{E}_\rho(X)v\rangle = \mathbf{tr}X(|v\rangle\langle u| \otimes \rho) \ \ \textit{para todo} \ \ u, v \in \mathscr{H}_1, X \in \mathcal{B}(\mathscr{H}) \tag{3.6}$$

donde

$$\|\mathbb{E}_\rho(X)\| \leq \|\rho\|_1 \|X\|.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} |\mathbf{tr}X(|v\rangle\langle u| \otimes \rho)| &\leq \|X\|_{B(\mathscr{H})} \|\, |v\rangle\langle u| \otimes \rho \,\|_{L_1(\mathscr{H})} \\ &= \|X\| \ \|\, |v\rangle\langle u| \,\|_{L_1(\mathscr{H})} \|\rho\|_{L_1(\mathscr{H}_2)}. \end{aligned}$$

por lo tanto existe $\mathbb{E}_\rho(X) \in B(\mathscr{H}_1)$ tal que $\langle u, \mathbb{E}_\rho(X)v\rangle = \mathbf{tr}X(|v\rangle\langle u| \otimes \rho)$.

$\square$

Definición 3.1.14. *Si ρ es un estado, entonces $\mathbb{E}_\rho : B(\mathscr{H}) \to B(\mathscr{H}_1)$ es llamada la ρ-esperanza condicional.*

Proposición 3.1.15. *Dada cualquier ρ-esperanza condicional, $\mathbb{E}_\rho : B(\mathscr{H}) \to B(\mathscr{H}_1)$ entonces $\mathbb{E}_\rho$ tiene una descomposición de Kraus.*

Demostración: Como $\rho \in L_1(\mathscr{H}_2)$ y además es positivo, entonces por el Teorema espectral se tiene que $\rho = \sum\limits_j \lambda_j |v_j\rangle\langle v_j|$ donde $\sum\limits_j \lambda_j < \infty$, $\lambda_j > 0$ y $\{v_j\}$ es una base ortonormal de $\mathscr{H}_2$.

Se define $V_j^* : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ por $V_j^*(q) = \sqrt{\lambda_j}(q \otimes v_j)$, por lo tanto existe $V_j : \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_1$ tal que

$$\begin{aligned} \langle w, V_j(u \otimes v)\rangle_{\mathscr{H}_1} &= \langle V_j^* w, u \otimes v\rangle_{\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2} \\ &= \langle \sqrt{\lambda_j}(w \otimes v_j), u \otimes v\rangle \\ &= \sqrt{\lambda_j}\langle w, u\rangle\langle v_j, v\rangle \end{aligned}$$

Ahora probemos que $\sum\limits_j V_j V_j^*$ converge en la topología débil.

En efecto

$$
\begin{aligned}
\langle u, \sum_{j=1}^{n} V_j V_j^* u\rangle_{\mathscr{H}_1} &= \sum_{j=1}^{n} \langle u, V_j V_j^* u\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle V_j^* u, V_j^* u\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \sqrt{\lambda_j}(u \otimes v_j), \sqrt{\lambda_j}(u \otimes v_j)\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle u \otimes v_j, u \otimes v_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle u, u\rangle \langle v_j, v_j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \|u\|^2 = \|u\|^2 \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \infty.
\end{aligned}
$$

por lo tanto $\sum_j V_j V_j^*$ converge en la topología débil.
Ahora sea $\sigma \in L_1(\mathscr{H})$, $\sigma \geq 0$, entonces $\sigma = \sum_j \alpha_j \langle d_j, d_j\rangle$ con $\sum_j \alpha_j < \infty$. Probaremos que $\mathbf{tr}(\sigma \sum_{j=1}^{n} V_j V_j^*) < \infty$.

Así tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{tr}(\sigma \sum_j V_j V_j^*) &= \mathbf{tr}(\sum_i \alpha_i \langle d_i, d_i\rangle \sum_{j=1}^{n} V_j V_j^*) \\
&= \sum_i \alpha_i \mathbf{tr}(\langle d_i, d_i\rangle \sum_{j=1}^{n} V_j V_j^*) \\
&= \sum_i \alpha_i \langle d_i, \sum_{j=1}^{n} V_j V_j^* d_i\rangle \\
&= \sum_i \alpha_i \|d_j\|^2 \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geq \sum_i \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \infty.
\end{aligned}
$$

Calculemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\langle u, \sum_{j=1}^{\infty} V_j X V_j^* v\rangle_{\mathscr{H}_1} &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, V_j X V_j^* v\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \langle V_j^* u, X V_j^* v\rangle_{\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle u\otimes v_j, X(v\otimes v_j)\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle u\otimes v_j, (X_1\otimes X_2)(v\otimes v_j)\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle u\otimes v_j, X_1 v\otimes X_2 v_j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle u, X_1 v\rangle \langle v_j, X_2 v_j\rangle \\
&= \langle u, X_1 u\rangle \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle v_j, X_2 v_j\rangle \\
&= \langle u, X_1 u\rangle X_2 \mathbf{tr}\rho.
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
\langle u, \mathbb{E}_\rho X v\rangle &= \mathbf{tr} X(|v\rangle\langle u|\otimes\rho) \\
&= \mathbf{tr} X(|v\rangle\langle u|\otimes \sum_j \lambda_j |v_j\rangle\langle v_j|) \\
&= \sum_j \lambda_j \mathbf{tr}(X_1\otimes X_2)(|v\rangle\langle u|\otimes |v_j\rangle\langle v_j|) \\
&= \sum_j \lambda_j \mathbf{tr}(X_1\otimes X_2)(|v\otimes v_j\rangle\langle u\otimes v_j|\otimes) \\
&= \sum_j \lambda_j \mathbf{tr}|X_1 v\otimes X_2 v_j\rangle\langle u\otimes v_j|\otimes \\
&= \sum_j \lambda_j \langle u, X_1 v\rangle\langle v_j, X_2 v_j\rangle \\
&= \langle u, X_1 v\rangle \sum_j \lambda_j \langle v_j, X_2 v_j\rangle \\
&= \langle u, X_1 v\rangle X_2 \mathbf{tr}\rho.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\mathbb{E}_\rho X$ acepta una representación de Kraus, lo cual implica que $\mathbb{E}_\rho X$ es completamente positiva.

$\square$

Proposición 3.1.16. *La ρ-esperanza condicional cumple con la siguientes propiedades:*

a) $\mathbb{E}_\rho 1 = 1$, $\mathbb{E}_\rho X^* = (\mathbb{E}_\rho X)^*$, $\|\mathbb{E}_\rho X\| \leq \|X\|$;

b) $\mathbb{E}_\rho(A \otimes 1)X(B \otimes 1) = A(\mathbb{E}_\rho X)B$, *para todo* $A, B \in B(\mathscr{H}_1), X \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$

Demostración: $a)$ Calculemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle u, \mathbb{E}_\rho(1)v\rangle &= \langle u, \sum V_j 1 V_j^* v\rangle = \sum \langle u, V_j 1 V_j^* v\rangle \\
&= \sum \langle V_j^* u, V_j^* v\rangle = \sum \lambda_j \langle u \otimes v_j, v \otimes v_j\rangle \\
&= \sum \lambda_j \langle u, v\rangle \langle v_j, v_j\rangle = \langle u, v\rangle \sum \lambda_j \langle v_j, v_j\rangle \\
&= \langle u, 1v\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{E}_\rho 1 = 1$.

$$\begin{aligned}
\langle u, (\mathbb{E}_\rho X)^* v\rangle &= \langle u, (\sum V_j X V_j^*)^* v\rangle = \sum \langle u, (V_j X V_j^*)^* v\rangle \\
&= \sum \langle u, V_j X^* V_j^* v\rangle = \langle u, \sum V_j X^* V_j^* v\rangle \\
&= \langle u, \mathbb{E}_\rho(X^*)v\rangle.
\end{aligned}$$

Para $\|\mathbb{E}_\rho X\| \leq \|X\|$ se sigue de la proposición anterior.

$b)$ Primero calculemos

$$\begin{aligned}
\langle u, A(\mathbb{E}_\rho X)Bv\rangle &= \langle u, A(\sum_j V_j X V_j^*)Bv\rangle = \langle A^* u, (\sum_j V_j X V_j^*)Bv\rangle \\
&= \sum_j \langle A^* u, V_j X V_j^* Bv\rangle = \sum_j \langle V_j^* A^* u, X V_j^* Bv\rangle \\
&= \sum_j \langle V_j^* A^* u, (X_1 \otimes X_2) V_j^* Bv\rangle = \sum_j \lambda_j \langle A^* u \otimes v_j, (X_1 \otimes X_2) Bv \otimes v_j\rangle \\
&= \sum_j \lambda_j \langle A^* u \otimes v_j, X_1 Bv \otimes X_2 v_j\rangle = \sum_j \lambda_j \langle A^* u, X_1 Bv\rangle \langle v_j, X_2 v_j\rangle \\
&= \sum_j \lambda_j \langle u, A X_1 Bv\rangle \langle v_j, X_2 v_j\rangle \\
&= \langle u, A X_1 Bv\rangle \sum_j \lambda_j \langle v_j, X_2 v_j\rangle.
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned}
\langle u, \mathbb{E}_\rho(A\otimes 1)X(B\otimes 1)v\rangle &= \mathbf{tr}(A\otimes 1)(X_1\otimes X_2)(B\otimes 1)(|v\rangle\langle u|\otimes\rho)\\
&= \mathbf{tr}(AX_1B\otimes X_2)(|v\rangle\langle u|\otimes \sum_j \lambda_j|v_j\rangle\langle v_j|)\\
&= \sum_j \lambda_j \mathbf{tr}(AX_1B\otimes X_2)(|v\otimes v_j\rangle\langle u\otimes v_j|)\\
&= \sum_j \lambda_j \mathbf{tr}(|(AX_1B\otimes X_2)(v\otimes v_j)\rangle\langle u\otimes v_j|)\\
&= \sum_j \lambda_j \langle u, AX_1Bv\rangle\langle v_j, X_2 v_j\rangle\\
&= \langle u, AX_1Bv\rangle \sum_j \lambda_j\langle v_j, X_2 v_j\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{E}_\rho(A\otimes 1)X(B\otimes 1) = A(\mathbb{E}_\rho X)B$.

□

Definición 3.1.17. Sea $\{\mathscr{H}_n, n\geq 0\}$ una sucesión de espacios de Hilbert y $\{\phi_n, n\geq 1\}$ vectores unitarios, $\phi_n\in\mathscr{H}_n$. Se define $\mathscr{H}_{[n+1} = \mathscr{H}_{n+1}\otimes\mathscr{H}_{n+2}\otimes\cdots$ con respecto a la sucesión estabilizante $\phi_{n+1},\phi_{n+2},\ldots$ y $\mathscr{H}_{n]} = \mathscr{H}_0\otimes\mathscr{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathscr{H}_n$. En el espacio de Hilbert

$$\widetilde{\mathscr{H}} = \mathscr{H}_0\otimes\mathscr{H}_{[1} = \mathscr{H}_{n]}\otimes\mathscr{H}_{[n+1},\ \ n=1,2,\ldots$$

considerar la sucesión creciente de $*$-álgebras

$$\mathcal{B}_{n]} = \{X\otimes 1_{[n+1}|X\in\mathcal{B}(\mathscr{H}_{n]})\},\ \ n=0,1,2,\ldots$$

Se define $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(\mathscr{H}_{n]})$ y $1_{n]}$ es la identidad en $\mathcal{B}_n$. Existe una única transformación lineal $\mathbb{E}_{n]}:\mathcal{B}_\infty\to\mathcal{B}_{n]}$ que satisface

$$\langle u, \mathbb{E}_{n]}(X)v\rangle = \langle u\otimes\phi_{[n+1}, Xv\otimes\phi_{[n+1}\rangle \text{ para todo } u,v\in\mathscr{H}_{n]}, X\in\mathcal{B}_\infty$$

donde $\phi_{[n+1} = \phi_{n+1}\otimes\phi_{n+2}\otimes\cdots$ y $\mathcal{B}_\infty = \mathcal{B}(\widetilde{\mathscr{H}})$. En efecto

$$\mathbb{E}_{n]}(X) = \mathbb{E}_{|\phi_{[n+1}\rangle\langle\phi_{[n+1}|}(X)\otimes 1_{[n+1}.$$

Proposición 3.1.18. *Las transformaciones $\{\mathbb{E}_{n]}\}_{n\geq 0}$ satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $\mathbb{E}_{n]}1 = 1$, $\mathbb{E}_{n]}X^* = (\mathbb{E}_{n]}X)^*$, $\|\mathbb{E}_{n]}X\|\leq\|X\|$;
2. $\mathbb{E}_{n]}AXB = A\mathbb{E}_{n]}(X)B$ *cuando* $A,B\in\mathcal{B}_{n]}$;
3. $\mathbb{E}_{m]}\mathbb{E}_{n]} = \mathbb{E}_{n]}\mathbb{E}_{m]} = \mathbb{E}_{m]}$ *cuando* $m\leq n$;
4. $\sum_{1\leq i,j\leq k} Y_i^*(\mathbb{E}_\rho X_i^* X_j)Y_j\geq 0$ *para todo* $Y_i\in\mathcal{B}_{n]}, X_i\in\mathcal{B}_\infty$.*En particular* $\mathbb{E}_{n]}X\geq 0$ *cuando* $X\geq 0$.

5. $s.\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{n]}X = X$ *para toda* $X \in \mathcal{B}_\infty$.

Proposición 3.1.19. *Sea* $\mathcal{B}_i \in B(\mathscr{H}_i)$, $\mathbb{E}_\rho(Z) \in \mathcal{B}_1$ *si* $Z \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.

Demostración: Si $Z = X_1 \otimes X_2$ la igualdad $\langle u, \mathbb{E}_\rho(Z)v\rangle = \mathbf{tr}Z|v\rangle\langle u| \otimes \rho$ implica que $\mathbb{E}_\rho(Z) = (\mathbf{tr}\rho X_2)X_1$. Por lo tanto la proposición se cumple para un numero finito de combinaciones lineales de productos de operadores en $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.

Supóngase que $\rho = \sum p_j|e_j\rangle\langle e_j|$ es un estado, donde $p_j \geq 0, \sum p_j = 1$ y $\{e_j\}$ un conjunto ortonormal además $\{Z_n\}$ converge débilmente a Z en $B(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$. Entonces por (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\langle u, \mathbb{E}_\rho(Z_n)v\rangle &= \lim_{n\to\infty} \sum p_j\langle u\otimes e_j, Z_n v \otimes e_j\rangle \\ &= \sum p_j\langle u\otimes e_j, Zv\otimes e_j\rangle \\ &= \langle u, \mathbb{E}_\rho(Z)v\rangle \text{ para todo } u, v \in \mathscr{H}_1 \end{aligned}$$

en otras palabras, $\mathbb{E}_\rho$ es débilmente continuo, si ρ es un estado. Como $\mathbb{E}_\rho$ es lineal en ρ la misma propiedad se cumple para cualquier operador de traza finita. El resultado requerido se sigue de la definición de $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.

□

Sean $\mathscr{H}_0, \mathscr{H}$ espacios de Hilbert donde $\dim\mathscr{H} = d < \infty$. Sea $\{e_0, e_1, \ldots, e_{d-1}\}$ una base ortonormal fija en $\mathscr{H}$ y sea $\mathcal{B}_0 \subset B(\mathscr{H}_0)$ una álgebra de Von Neumann con identidad. Haciendo $\mathscr{H}_n = \mathscr{H}, \phi_n = e_0$ para toda $n \geq 1$, constrúyanse los espacios de Hilbert $\mathscr{H}_{n]}$, $\mathscr{H}_{[n+1}$ para cada $n \geq 0$. Se definen las algebras de von Neumann como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n]} &= \{X \otimes 1_{[n+1} | X \in \mathcal{B}_0 \otimes B(\mathscr{H}^{\otimes^n})\},\ n \geq 0 \\ \mathcal{B} &= \mathcal{B}_0 \otimes B(\mathscr{H}_{[1}). \end{aligned}$$

Proposición 3.1.20. *Sea* $\theta : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_0 \otimes B(\mathscr{H})$ *un* $*$*-homomorfismo unital. Se definen las transformaciones lineales* $\theta^i_j : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_0$ *dadas por*

$$\theta^i_j(X) = \mathbb{E}_{|e_j\rangle\langle e_i|}(\theta(X)),\ 0 \leq i, j \leq d-1,\ \ X \in \mathcal{B}_0 \tag{3.7}$$

Entonces las siguientes condiciones se cumplen:

(i) $\theta^i_j(1) = \delta^i_j,\ \theta^i_j(X^*) = \theta^j_i(X)^*$;

(ii) $\theta^i_j(XY) = \sum_{k=0}^{d-1} \theta^i_k(X)\theta^k_j(Y)$ *para todo* $X, Y \in \mathcal{B}_0$.

Demostración: De (3.6) y de (3.7) se tiene que

$$\langle u, \theta^i_j(X)v\rangle = \langle u \otimes e_i, \theta(X)v \otimes e_j\rangle.$$

Si $X = 1$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \langle u, \theta^i_j(1)v\rangle &= \langle u\otimes e_i, \theta(1)v\otimes e_j\rangle \\ &= \langle u \otimes e_i, v\otimes e_j\rangle \\ &= \langle u, v\rangle\langle e_i, e_j\rangle \\ &= \langle u, \delta^i_j v\rangle. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}\langle u, \theta^i_j(X^*)v\rangle &= \langle u\otimes e_i, \theta(X^*)v\otimes e_j\rangle \\ &= \overline{\langle v\otimes e_j, \theta(X)u\otimes e_i\rangle} \\ &= \overline{\langle v, \theta^j_i(X)u\rangle} \\ &= \langle u, \theta^j_i(X)^*u\rangle\end{aligned}$$

Para probar (ii)se elige una base ortonormal $\{u_n\}$ en $\mathscr{H}_0$, entonces

$$\begin{aligned}\langle u, \theta^i_j(XY)v\rangle &= \langle u\otimes e_i, \theta(X)\theta(Y)v\otimes e_j\rangle \\ &= \langle \theta(X^*)u\otimes e_i, \theta(Y)v\otimes e_j\rangle \\ &= \langle \sum_{r,k}\langle u_r\otimes e_k, \theta(X^*)u\otimes e_i\rangle u_r\otimes e_k, \sum_{r,k}\langle u_r\otimes e_k, \theta(Y)v\otimes e_j\rangle u_r\otimes e_k\rangle \\ &= \sum_{r,k}\langle \theta(X^*)u\otimes e_i, u_r\otimes e_k\rangle\langle u_r\otimes e_k, \theta(Y)v\otimes e_j\rangle\langle u_r\otimes e_k, u_r\otimes e_k\rangle \\ &= \sum_{r,k}\langle u\otimes e_i, \theta(X)u_r\otimes e_k\rangle\langle u_r\otimes e_k, \theta(Y)v\otimes e_j\rangle \\ &= \sum_{r,k}\langle u, \theta^i_k(X)u_r\rangle\langle u_r, \theta^k_j(Y)v\rangle \\ &= \sum_{k,r}\langle\langle \theta^i_k(X)u_r, u\rangle u_r, \theta^k_j(Y)v\rangle \\ &= \sum_{k,r}\langle\langle u_r, (\theta^i_k(X))^*u\rangle u_r, \theta^k_j(Y)v\rangle \\ &= \sum_{k}\langle \textstyle\sum_r\langle u_r, (\theta^i_k(X))^*u\rangle u_r, \theta^k_j(Y)v\rangle \\ &= \sum_{k}\langle (\theta^i_k(X))^*u, \theta^k_j(Y)v\rangle \\ &= \sum_{k}\langle u, \theta^i_k(X)\theta^k_j(Y)v\rangle \\ &= \langle u, \sum_{k}\theta^i_k(X)\theta^k_j(Y)v\rangle\end{aligned}$$

por lo tanto $\theta^i_j(XY) = \sum\limits_k \theta^i_k(X)\theta^k_j(Y)$.

□

Proposición 3.1.21. *Sean $\theta, \mathscr{H}_0, \mathscr{H}_1, \mathcal{B}_0$ como en la proposición (3.1.20). Se definen las transformaciones $j_n : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_{n]}, n = 0, 1, 2, \ldots$, de manera inductiva por*

$$\begin{aligned} j_0(X) &= X \otimes 1_{[1}, \;\; j_1(X) = \theta(X) \otimes 1_{[2}, \\ j_n(X) &= \sum_{0 \leq i,k \leq d-1} j_{n-1}(\theta_k^i(X)) 1_{n-1]} \otimes |e_i\rangle\langle e_k| \otimes 1_{[n+1}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Entonces j_n es un $*$-homomorfismo unitario para cada n. Además

$$\mathbb{E}_{n-1]} j_n(X) = j_{n-1}(\theta_0^0(X)) \text{ para todo } n \geq 1, X \in \mathcal{B}_0,$$

donde $\mathbb{E}_{n-1]}$ es la $\phi_{[n}$-esperanza condicional de la definición (3.1.17)

Demostración: La prueba es por inducción:

Para $n = 0, 1$ se tiene que

$$j_0(1) = 1 \otimes 1_{[2}$$
$$j_1(X) = \theta(X) \otimes 1_{[2}$$

$$\begin{aligned} j_1(X^*) &= \theta(X^*) \otimes 1_{[2} \\ &= \theta(X)^* \otimes 1_{[2} \\ &= (\theta(X) \otimes 1_{[2})^* \\ &= j_1(X)^* \end{aligned}$$

Por el inciso (i) de la proposición (3.1.20) y por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned} j_n(1) &= \sum_{0 \leq i,j \leq d-1} j_{n-1}(\theta_j^i(1)) 1_{n-1]} \otimes |e_i\rangle\langle e_j| \otimes 1_{[n+1} \\ &= \sum_{0 \leq i,j \leq d-1} j_{n-1}(\delta_j^i) 1_{n-1]} \otimes |e_i\rangle\langle e_j| \otimes 1_{[n+1} \\ &= 1_{n-1]} \otimes \sum_i |e_i\rangle\langle e_i| \otimes 1_{[n+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} j_n(X^*) &= \sum_{0 \leq i,j \leq d-1} j_{n-1}(\theta_j^i(X^*)) 1_{n-1]} \otimes |e_i\rangle\langle e_j| \otimes 1_{[n+1} \\ &= \sum_{0 \leq i,j \leq d-1} j_{n-1}(\theta_j^i(X)^*) 1_{n-1]} \otimes |e_i\rangle\langle e_j| \otimes 1_{[n+1} \\ &= \Big(\sum_{0 \leq i,j \leq d-1} j_{n-1}(\theta_i^j(X^*)) 1_{n-1]} \otimes |e_j\rangle\langle e_i| \otimes 1_{[n+1} \Big)^* \\ &= j_n(X_n)^* \end{aligned}$$

Por el inciso (ii) de la proposición (3.1.20) se tiene que

$$
\begin{aligned}
j_n(X)j_n(Y) &= \left(\sum_{0\leq i,j\leq d-1} j_{n-1}(\theta^i_j(X))1_{n-1]}\otimes|e_i\rangle\langle e_j|\otimes 1_{[n+1}\right) \\
&\quad \left(\sum_{0\leq l,k\leq d-1} j_{n-1}(\theta^k_l(Y))1_{n-1]}\otimes|e_k\rangle\langle e_l|\otimes 1_{[n+1}\right) \\
&= \sum_{i,j} j_{n-1}(\theta^i_j(X))1_{n-1]}\sum_{l,k} j_{n-1}(\theta^k_l(Y))1_{n-1]}\otimes|e_i\rangle\langle e_j||e_k\rangle\langle e_l|\otimes 1_{[n+1} \\
&= \sum_{i,j,l,k} j_{n-1}(\theta^i_j(X)\theta^k_l(Y))1_{n-1]}\otimes\delta^k_j|e_i\rangle\langle e_l|\otimes 1_{[n+1} \\
&= \sum_{i,l,k} j_{n-1}(\theta^i_k(X)\theta^k_l(Y))1_{n-1]}\otimes|e_i\rangle\langle e_l|\otimes 1_{[n+1} \\
&= \sum_{i,l} j_{n-1}(\sum_k \theta^i_k(X)\theta^k_l(Y))1_{n-1]}\otimes|e_i\rangle\langle e_l|\otimes 1_{[n+1} \\
&= \sum_{i,l} j_{n-1}(\theta^i_l(XY))1_{n-1]}\otimes|e_i\rangle\langle e_l|\otimes 1_{[n+1} \\
&= j_n(XY)
\end{aligned}
$$

Falta probar $\mathbb{E}_{n-1]}j_n(X) = j_{n-1}(\theta^0_0(X))$ para todo $X\in\mathcal{B}_0$.

En efecto

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{n-1]}j_n(X) &= \mathbb{E}_{n-1]}\sum_{i,k} j_{n-1}(\theta^i_k(X))1_{n-1]}\otimes|e_i\rangle\langle e_k|\otimes 1_{[n+1} \\
&= \sum_{i,k}\mathbb{E}_{n-1]}(j_{n-1}(\theta^i_k(X))1_{n-1]}\otimes|e_i\rangle\langle e_k|\otimes 1_{[n+1}) \\
&= \sum_{i,k}\mathbb{E}_{n-1]}(j_{n-1}(\theta^i_k(X))1_{n-1]}\otimes 1\otimes 1_{[n+1})(1_{n-1]}\otimes|e_i\rangle\langle e_k|\otimes 1_{[n+1})(1_{n-1]}\otimes 1\otimes 1_{[n+1}) \\
&= \sum_{i,k}(j_{n-1}(\theta^i_k(X))1_{n-1]}\otimes 1\otimes 1_{[n+1})\mathbb{E}_{n-1]}(1_{n-1]}\otimes|e_i\rangle\langle e_k|\otimes 1_{[n+1})(1_{n-1]}\otimes 1\otimes 1_{[n+1})
\end{aligned}
$$

Por otro lado, para $u,v\in\mathscr{H}_{n-1]}$ con $u=u_0\otimes\cdots\otimes u_{n-1}$ y $v=v_0\otimes\cdots\otimes v_{n-1}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle u, \mathbb{E}_{n-1]}(1_{n-1]} \otimes |e_i\rangle\langle e_k| \otimes 1_{[n+1})v\rangle &= \langle u \otimes \phi_{[n}, (1_{n-1]} \otimes |e_i\rangle\langle e_k| \otimes 1_{[n+1})v \otimes \phi_{[n}\rangle \\
&= \langle u, v\rangle\langle \phi_{[n}, |e_i\rangle\langle e_k|\phi_{[n}\rangle\langle \phi_{[n+1}, \phi_{[n+1}\rangle \\
&= \langle u, v\rangle\langle e_0, |e_i\rangle\langle e_k|e_0\rangle \\
&= \langle u, v\rangle\langle e_0, \langle e_k, e_0\rangle e_i\rangle \\
&= \langle u, v\rangle\langle e_0, e_i\rangle\langle e_k, e_0\rangle \\
&= \langle u, v\rangle\delta_0^i\delta_k^0 = \langle u, \delta_0^i\delta_k^0 v\rangle.
\end{aligned}$$

por lo tanto se tiene que

$$\sum_{i,k}(j_{n-1}(\theta_k^i(X))1_{n-1]} \otimes 1 \otimes 1_{[n+1})\mathbb{E}_{n-1]}(1_{n-1]} \otimes |e_i\rangle\langle e_k| \otimes 1_{[n+1})(1_{n-1]} \otimes 1 \otimes 1_{[n+1})$$

$$= j_{n-1}(\theta_0^0(X))1_{n-1]} \otimes 1_{[n}.$$

□

Corolario 3.1.22. *Sean $\{j_n, n \geq 0\}$ los $*$-homomorfismos unitarios de la proposición 3.1.21, escribamos $T = \theta_0^0$, entonces para $0 \leq n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \infty, X_i \in \mathcal{B}_0, 1 \leq i \leq k$ se tiene que*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{n_0]}j_{n_1}(X_1)j_{n_2}(X_2)\cdots j_{n_k}(X_k) = \\
&\qquad j_{n_0}(T^{n_1-n_0}(X_1T^{n_2-n_1}(X_2\cdots(X_{k-1}T^{n_k-n_{k-1}}(X))\cdots).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Demostración: Por la proposición(3.1.18) se tiene que $\mathbb{E}_{n_0]} = \mathbb{E}_{n_0]}\mathbb{E}_{n_{k-1}]}$. Como $j_{n_1}(X_1)\cdots j_{n_{k-1}}(X_{k-1}) \in \mathcal{B}_{n_{k-1}]}$, por lo tanto se tiene que

$$\mathbb{E}_{n_0]}j_{n_1}(X_1)\cdots j_{n_k}(X_k) = \mathbb{E}_{n_o]}j_{n_1}(X_1)\cdots j_{n_{k-1}}(X_{k-1})\mathbb{E}_{n_{k-1}]}(j_{n_k}(X_k)) \tag{3.10}$$

Como $\mathbb{E}_{n_{k-1}]} = \mathbb{E}_{n_{k-1}]}\mathbb{E}_{n_{k-1}+1]}\cdots\mathbb{E}_{n_k-1]}$ y aplicando la proposición (3.1.21) a $\mathbb{E}_{n_{k-1}]}$ se tiene que

$$\mathbb{E}_{n_{k-1}]}j_{n_k}(X_k) = j_{n_{k-1}}(T^{n_k-n_{k-1}}(X_k)).$$

sustituyendo lo anterior en (3.10), usando el hecho de que $j_{n_{k-1}}$ es un homomorfismo y repitiendo este argumento sucesivamente se obtiene (3.9).

□

Proposición 3.1.23. *La transformación $T = \theta_0^0$ de $\mathcal{B}_0$ en $\mathcal{B}_0$ satisface las siguientes condiciones:*

i) T es una $*$-transformación lineal unitaria sobre $B(\mathscr{H}_0)$;

ii) para cualquier $X_i, Y_i \in \mathcal{B}_0, 1 \leq i \leq k$*, se tiene* $\sum_{1\leq i,j\leq k} Y_i^* T(X_i^* X_j) Y_j \geq 0$ *para cada* k*. En particular* $T(X) \geq 0$ *cuando* $X \geq 0$*.*

Demostración: Como θ es un $*$-homomorfismo unitario de $\mathcal{B}_0$ en $\mathcal{B}_0 \otimes B(\mathscr{H})$ y $T(X) = \theta_0^0(X) = \mathbb{E}_{|e_0\rangle\langle e_0|}(\theta(X))$, entonces

$$\begin{aligned} T(X^*) &= \mathbb{E}_{|e_0\rangle\langle e_0|}(\theta(X^*)) = \mathbb{E}_{|e_0\rangle\langle e_0|}(\theta(X)^*) \\ &= (\mathbb{E}_{|e_0\rangle\langle e_0|}(\theta(X)))^* = (T(X))^* \\ T(1) &= \mathbb{E}_{|e_0\rangle\langle e_0|}(\theta(1)) \\ &= \mathbb{E}_{|e_0\rangle\langle e_0|}(1) = 1 \end{aligned}$$

T es lineal ya que es composición de transformaciones lineales. Esto prueba que T es una *-transformación lineal unitaria.

Para en inciso (ii) se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq i,j\leq k} Y_i^* T(X_i^* X_j) Y_j &= \sum_{1\leq i,j\leq k} Y_i^* \mathbb{E}_{|e_0\rangle\langle e_0|}(\theta(X_i^*)\theta(X_j)) Y_j \\ &= \mathbb{E}_{|e_0\rangle\langle e_0|} \sum_{1\leq i,j\leq k} (Y_i^* \otimes 1)\theta(X_i^*)\theta(X_j)(Y_j \otimes 1) \\ &= \mathbb{E}_{|e_0\rangle\langle e_0|} \sum_{1\leq i,j\leq k} (\theta(X_i)(Y_i \otimes 1))^* \theta(X_j)(Y_j \otimes 1) \\ &= \mathbb{E}_{|e_0\rangle\langle e_0|}(\{\sum_i (\theta(X_i)(Y_i \otimes 1))\}^* \{\sum_j \theta(X_j)(Y_j \otimes 1)\}) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Haciendo $k = 1, Y_1 = 1, X_1 = X$ se obtiene que $T(X) \geq 0$ si $X \geq 0$.

□

Definición 3.1.24. (Conmutador) Sean $A, B \in B(H)$, entonces el *conmutador de* A *y* B esta definido por

$$[A, B] = AB - BA$$

Proposición 3.1.25. *Supóngase que la álgebra de von Neumann* $\mathcal{B}_0$ *de la proposición (3.1.21) es abeliana. Entonces para cualquier* $X, Y \in \mathcal{B}_0, m, n \geq 0$

$$[j_m(X), j_n(Y)] = 0. \tag{3.11}$$

Demostración: Como j_n es un homomorfismo , se tiene que $[j_n(X), j_n(Y)] = j_n[X, Y] = 0$ por lo tanto (3.11) es trivial si $m = n$. Supóngase que $m < n$. Por inducción sobre (3.8) así se obtiene

$$j_n(X) =$$

$$\sum_{\substack{0\leq i_1, i_2, \ldots \\ k_1, k_2, \ldots \leq d-1}} j_m(\theta_{k_1}^{i_1} \cdots \theta_{k_{n-m}}^{i_{n-m}}(X)) 1_{m]} \otimes |e_{i_1}\rangle\langle e_{k_1}| \otimes \cdots \otimes |e_{i_{n-m}}\rangle\langle e_{k_{n-m}}| \otimes 1_{[n+1}$$

por lo que se tiene

$$[j_n(X), j_m(Y)] = j_n(X)j_m(Y) - j_m(Y)j_n(X)$$

$$= \sum_{\substack{0\le i_1,i_2,\ldots \\ k_1,k_2,\ldots\le d-1}} j_m(\theta_{k_1}^{i_1}\cdots\theta_{k_{n-m}}^{i_{n-m}}(X))j_m(Y)1_{m]}\otimes|e_{i_1}\rangle\langle e_{k_1}|\otimes\cdots\otimes|e_{i_{n-m}}\rangle\langle e_{k_{n-m}}|\otimes 1_{[n+1}-$$

$$\sum_{\substack{0\le i_1,i_2,\ldots \\ k_1,k_2,\ldots\le d-1}} j_m(Y)j_m(\theta_{k_1}^{i_1}\cdots\theta_{k_{n-m}}^{i_{n-m}}(X))1_{m]}\otimes|e_{i_1}\rangle\langle e_{k_1}|\otimes\cdots\otimes|e_{i_{n-m}}\rangle\langle e_{k_{n-m}}|\otimes 1_{[n+1}$$

$$= \sum_{i_l,k_r} j_m(\theta_{k_1}^{i_1}\cdots\theta_{k_{n-m}}^{i_{n-m}}(X)Y - Y\theta_{k_1}^{i_1}\cdots\theta_{k_{n-m}}^{i_{n-m}}(X))1_{m]}\otimes|e_{i_1}\rangle\langle e_{k_1}|\otimes\cdots\otimes|e_{i_{n-m}}\rangle\langle e_{k_{n-m}}|\otimes 1_{[n+1}$$
$$= 0$$

□

Los hechos presentados en la Proposición(3.1.21), Corolario(3.1.22) y la Proposición(3.1.23) son análogos al caso clásico de la teoría de cadenas de Markov. La ecuación (3.9) es la versión no-conmutativa de la propiedad de Markov clásica.

Definición 3.1.26. A la familia de homomorfismo $\{j_n\}$ definidos en (3.1.21) se le llama *Cadena de Markov cuántica* inducida por los $*$-homomorfismos $\theta : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_0 \otimes B(\mathscr{H})$.

Nota: Parthasarathy, que es en donde nos basamos, le llama a esta familia *Flujo estocástico cuántico*.

Proposición 3.1.27. *Sea* $\sigma \in L_1(\mathscr{H}_1), \rho \in L_1(\mathscr{H}_2), X \in B(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$*, entonces:*
$\mathbf{tr}(\sigma\mathbb{E}_\rho(X)) = \mathbf{tr}((\sigma\otimes\rho)X)$.

Demostración: Basta probarlo para $\sigma \ge 0$, $\sigma \in L_1(\mathscr{H}_1)$. Se descompone a σ en su descomposición espectral, es decir, $\sigma = \sum_j \lambda_j|g_j\rangle\langle g_j|$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{tr}(\sigma\mathbb{E}_\rho(X)) &= \mathbf{tr}(\sum_j \lambda_j|g_j\rangle\langle g_j|\mathbb{E}_\rho(X)) &&= \sum_j \lambda_j\mathbf{tr}(|g_j\rangle\langle g_j|\mathbb{E}_\rho(X)) \\
&= \sum_j \lambda_j\langle g_j, \mathbb{E}_\rho(X)g_j\rangle &&= \sum_j \lambda_j\mathbf{tr}(X(|g_j\rangle\langle g_j|\otimes\rho)) \\
&= \mathbf{tr}(X(\sum_j \lambda_j|g_j\rangle\langle g_j|\otimes\rho)) &&= \mathbf{tr}(X(\sigma\otimes\rho)).
\end{aligned}$$

□

Sea $\mathcal{B}_0$ abeliana y $X_1, X_2, \ldots, X_k$ cualquier conjunto finito de elementos auto-adjuntos de $\mathcal{B}_0$ entonces se puede probar que $j_{n_1}(X_1), j_{n_2}(X_2), \ldots, j_{n_k}(X_k)$ es una familia conmutativa de operadores autoadjuntos, así para cada n_k existe $R_{n_k} : B(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathscr{H}_0\otimes\{\mathscr{H}\otimes\cdots\})$ resolución de la identidad. Entonces $\{j_{n_k}\}$ tiene una resolución de la identidad conjunta $R : B(R^k) \to \mathcal{P}(\mathscr{H}_0 \otimes \{\mathscr{H}\otimes\cdots\})$ por lo que existe una distribución conjunta, $\mu_\rho : B(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$, $\mu_\rho(C) = \mathbf{tr}\rho R(C)$,

de las $j_{n_k}(X_k)$ en el estado ρ sobre el espacio de Hilbert $\mathscr{H}_0 \otimes \{\mathscr{H} \otimes \cdots\}$ respecto a la sucesión estabilizante $\{\phi_n = e_0\}$ donde e_0 es un vector unitario.
Para cualquier estado $\rho_0 \in \mathscr{H}_0$, la familia $\{j_n(X)|X \in \mathcal{B}_0, n \geq 0\}$ puede ser interpretada como una Cadena de Markov clásica en el estado $\rho_0 \otimes |e_0 \otimes e_0 \otimes \cdots\rangle\langle e_0 \otimes e_0 \otimes \cdots|$.

Sea $\{X_i\}$ un proceso clásico, sean $f_0, \ldots, f_k \in B(\Omega)$ y ρ es un estado en $B(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$ tal que $\rho = \rho_0 \otimes |e_0\rangle\langle e_0|$. Probaremos que $\mathbf{tr}(\rho j_{n_0}(f_0) \cdots j_{n_k}(f_k)) = \mathbf{E}((f_0 \circ X_{n_0}) \cdots (f_k \circ X_{n_k}))$. Pero solo basta probarlo para indices consecutivos ya que haciendo

$$g_i = \begin{cases} f_{n_i} & \text{si} \quad i \in \{n_0, \ldots, n_k\} \\ \\ 1 & \text{si} \quad i \notin \{n_0, \ldots, n_k\} \end{cases}$$

tenemos $j_0(g_0)j_1(g_1) \cdots j_{n_0}(f_0) = j_{n_0}(f_0)$.

Teorema 3.1.28. $\mathbf{tr}(\rho j_0(f_0) \cdots j_k(f_k)) = \boldsymbol{E}((f \circ X_0) \cdots (f_k \circ X_k))$.

Demostración: Por inducción sobre k.
Para $k = 2$

$$\begin{aligned}
\mathbf{tr}(\rho j_0(f_0) j_1(f_1)) &= \mathbf{tr}((\rho_0 \otimes |e_{[1}\rangle\langle e_{[1}|)(f_0 \otimes 1_{[1})(\theta(f_1) \otimes 1_{[2})) \\
&= \mathbf{tr}((\rho_0 \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)(f_0 \otimes 1)\theta(f_1) \otimes |e_{[2}\rangle\langle e_{[2}| \\
&= \mathbf{tr}((\rho_0 \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)(f_0 \otimes 1)\theta(f_1)) \\
&= \mathbf{tr}((f_0 \otimes 1)\theta(f_1)(\rho_0 \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)) \\
&= \sum_j \lambda_j \mathbf{tr}((f_0 \otimes 1)\theta(f_1)(|g_j\rangle\langle g_j| \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)) \\
&= \sum_j \langle g_j, \mathbb{E}_{|e_0\rangle\langle e_0|}(f_0 \otimes 1)\theta(f_1) g_j\rangle \\
&= \sum_j \langle g_j, f_0 \mathbb{E}_{|e_0\rangle\langle e_0|}\theta(f_1) g_j\rangle \\
&= \sum_j \langle g_j, f_0 \theta_0^0(f_1) g_j\rangle = \sum_j \langle g_j, f_0 T(f_1) g_j\rangle \\
&= \mathbf{tr}(\rho_0 f_0 T(f_1)) = \mathbf{E}(f_0 T(f_1)) \\
&= \mathbf{E}((f_0 \circ X_0)(T f_1 \circ X_0)) = \mathbf{E}((f_0 \circ X_0)(f_1 \circ X_1)).
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que se cumple

$$\mathbf{tr}(\rho j_0(f_0) \cdots j_{k-1}(f_{k-1})) = \mathbf{E}(f \circ X_0 \cdots f_{k-1} \circ X_{k-1})$$

entonces,

$$\mathbf{tr}(\rho j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})\ j_k(f_k))$$

$$= \mathbf{tr}(\rho j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})\ \sum_{i,l} j_{k-1}(\theta_l^i(f_k))(1_{k-1]}\otimes |e_i\rangle\langle e_l|\otimes 1_{[k+1})$$

$$= \sum_{i,l}\mathbf{tr}((\rho_0\otimes |e_{[1}\rangle\langle e_{[1}|)j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})\ j_{k-1}(\theta_l^i(f_k))(1_{k-1]}\otimes |e_i\rangle\langle e_l|\otimes 1_{[k+1}))$$

$$= \sum_{i,l}\mathbf{tr}(j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})\ j_{k-1}(\theta_l^i(f_k)(\rho_0\otimes |e_{[k-1}\rangle\langle e_{[k-1}|\otimes |e_0\rangle\langle e_0||e_i\rangle\langle e_l|\otimes |e_{[k+1}\rangle\langle e_{[k+1}|))$$

$$= \sum_{l}\mathbf{tr}(j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})\ j_{k-1}(\theta_l^0(f_k)(\rho_0\otimes |e_{[k-1}\rangle\langle e_{[k-1}|\otimes |e_0\rangle\langle e_l|\otimes |e_{[k+1}\rangle\langle e_{[k+1}|))$$

$$= \mathbf{tr}(j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})\ j_{k-1}(\theta_0^0(f_k)(\rho_0\otimes |e_{[k-1}\rangle\langle e_{[k-1}|\otimes |e_0\rangle\langle e_0|\otimes |e_{[k+1}\rangle\langle e_{[k+1}|))$$

$$+ \sum_{l\neq 0}\mathbf{tr}(j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})\ j_{k-1}(\theta_l^0(f_k)(\rho_0\otimes |e_{[k-1}\rangle\langle e_{[k-1}|\otimes |e_0\rangle\langle e_l|\otimes |e_{[k+1}\rangle\langle e_{[k+1}|))$$

Se probará que

$$\sum_{l\neq 0}\mathbf{tr}(j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})\ j_{k-1}(\theta_l^0(f_k)(\rho_0\otimes |e_{[k-1}\rangle\langle e_{[k-1}|\otimes |e_0\rangle\langle e_l|\otimes |e_{[k+1}\rangle\langle e_{[k+1}|)) = 0$$

La igualdad anterior se deduce de lo siguiente

$$\mathbf{tr}(j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})\ j_{k-1}(\theta_0^0(f_k)(\rho_0\otimes |e_{[1}\rangle\langle e_{[1}|)$$

$$= \mathbf{tr}(j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})\ \mathbb{E}_{k-1]}j_k(f_k)(\rho_0\otimes |e_{[1}\rangle\langle e_{[1}|)$$

$$= \mathbf{tr}(\mathbb{E}_{k-1]}(j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})j_k(f_k))(\rho_0\otimes |e_{[1}\rangle\langle e_{[1}|)$$

$$= \mathbf{tr}(\mathbb{E}_{|e_{[k}\rangle\langle e_{[k}|}(\rho_0\otimes |e_{[1}\rangle\langle e_{[1}|)(j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})j_k(f_k)\otimes 1_{[k})$$

$$= \mathbf{tr}(\mathbb{E}_{|e_{[k}\rangle\langle e_{[k}|}(\rho_0\otimes |e_{[k-1}\rangle\langle e_{[k-1}|)(j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})j_k(f_k))$$

$$= \mathbf{tr}((\rho_0\otimes |e_{[k-1}\rangle\langle e_{[k-1}|\otimes |e_{[k}\rangle\langle e_{[k}|)(j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})j_k(f_k))$$

sustituyendo esta igualdad en la ecuación de arriba se tiene que

$$\sum_{l\neq 0}\mathbf{tr}(j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})\ j_{k-1}(\theta_l^0(f_k)(\rho_0\otimes |e_{[k-1}\rangle\langle e_{[k-1}|\otimes |e_0\rangle\langle e_l|\otimes |e_{[k+1}\rangle\langle e_{[k+1}|)) = 0$$

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{tr}(\rho j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})\ j_k(f_k)) &= \mathbf{tr}(j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1})\ j_{k-1}(\theta_0^0(f_k)(\rho_0\otimes|e_{[1]}\rangle\langle e_{[1]}|) \\
&= \mathbf{tr}(\rho j_0(f_0)\cdots j_{k-1}(f_{k-1}\theta_0^0(f_k) \\
&= \mathbf{E}((f_0\circ X_0)\cdots(f_{k-1}\theta_0^0(f_k)\circ X_{k-1})) \\
&= \mathbf{E}((f_0\circ X_0)\cdots(f_{k-1}\circ X_{k-1})(T(f_k)\circ X_{k-1})) \\
&= \mathbf{E}((f_0\circ X_0)\cdots(f_{k-1}\circ X_{k-1})(f_k\circ X_k)).
\end{aligned}$$

□

3.2. Ejemplos de Cadenas de Markov Cuánticas a tiempo discreto

Ejemplo 3.2.1. Sea $(S,\mathcal{F},\mu)$ cualquier espacio de medida y sea $\phi_j : S\to S$ una transformación medible que satisface $\mu\phi_j^{-1} \ll \mu, 0\le j\le d-1$. Supóngase que $p_j : S\to[0,1], 0\le j\le d-1$ son funciones medibles que satisfacen $\sum_j p_j = 1$. Sea $\mathcal{B}_0 = L^\infty(\mu)\subset B(L^2(\mu))$ donde las funciones medibles acotadas son consideradas como operadores de multiplicación acotados. Sea $\mathscr{H}_0 = L^2(\mu), \mathscr{H} = \mathbb{C}^d$ y elijamos una base ortonormal $\{e_0,e_1,\ldots,e_{d-1}\}$ de $\mathscr{H}=\mathbb{C}^d$, se define la transformación $T:\mathcal{B}_0\to\mathcal{B}_0$ dada por

$$Tf = \sum_{j=0}^{d-1} p_j f\circ\phi_j \tag{3.12}$$

donde $\circ$ denota la composición. La transformación T puede ser interpretada como el operador de transición de una cadena de Markov con espacio de estados S para que el estado cambie en un paso de x a uno de los estado $\phi_0(x),\phi_1(x),\ldots,\phi_{d-1}(x)$ con probabilidades $p_0(x),p_1(x),\ldots,p_{d-1}(x)$ respectivamente. Sin embargo, es posible que $\phi_i(x)=\phi_j(x)$ para algún $i\ne j$. Si S es finito de cardinalidad k se puede probar que para cualquier operador de transición de Markov es de la forma (3.12) con μ medida de conteo.

Considérese una matriz unitaria de tamaño $d\times d$ de funciones medibles complejo-valuadas de U en S donde $U=((u_{ij})), 0\le i,j\le d-1$, $u_{0j}=\sqrt{p_j}$ para toda j. Por ejemplo uno puede seleccionar la siguiente matriz ortogonal

$$U = \left(\begin{array}{c|ccc} p_0^{\frac12} & p_1^{\frac12} & \cdots & p_{d-1}^{\frac12} \\ \hline -p_1^{\frac12} & & & \\ \vdots & & 1-Q & \\ -p_{d-1}^{\frac12} & & & \end{array}\right)$$

donde $Q=((q_{ij}))$, $q_{ij}=(p_ip_j)^{\frac12}(1+p_0^{\frac12})^{-1}$, $i,j\ge 1$.

Veamos que U es unitaria, se consideran tres casos:

1. Cuando, $i = j$

$$\begin{aligned}
U^*U(i,j) &= \sum_{l=0}^{d-1} U^*(i,l)U(l,j) = p_i^{\frac{1}{2}} p_j^{\frac{1}{2}} + \sum_{l=1}^{d-1} U^*(i,l)U(l,j) \\
&= (p_i p_i)^{\frac{1}{2}} + \sum_{l=1}^{d-1} U^*(i,l)U(l,j) = p_i + \sum_{l=1}^{d-1} (I-Q)^*(i,l)(I-Q)(l,j) \\
&= p_i + (I-Q)^*(i,i)(I-Q)(i,i) + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{d-1} (I-Q)^*(i,l)(I-Q)(l,j) \\
&= p_i + (1 - p_i(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1})^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{d-1} p_l p_i (1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-2} \\
&= p_i + 1 - 2p_i(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1} + p_i(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-2}(1-p_0) \\
&= p_i + 1 - 2p_i(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1} + p_i(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1}(1-p_0^{\frac{1}{2}}) \\
&= p_i + 1 - p_i(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1}[2-(1-p_0^{\frac{1}{2}})] = p_i + 1 - p_i(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1}[1+p_0^{\frac{1}{2}}] \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Cuando , $i \neq j$ y $i, j \geq 1$

$$\begin{aligned}
U^*U(0,j) &= (p_i p_j)^{\frac{1}{2}} + U^*(i,i)U(i,j) + U^*(i,j)U(j,j) + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i,j}}^{d-1} U^*(i,l)U(l,j) \\
&= (p_i p_j)^{\frac{1}{2}} + (1 - p_i(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1})(-(p_i p_j)^{\frac{1}{2}}(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1}) \\
&\quad +(-(p_i p_j)^{\frac{1}{2}}(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1})(1 - p_j(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1}) + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i,j}}^{d-1} (p_i p_l)^{\frac{1}{2}}(p_l p_j)^{\frac{1}{2}}(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-2}) \\
&= (p_i p_j)^{\frac{1}{2}} - 2(p_i p_j)^{\frac{1}{2}}(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1}) + (p_i p_j)^{\frac{1}{2}}(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-2})(p_i + p_j) \\
&\quad +(p_i p_j)^{\frac{1}{2}}(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-2}) \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i,j}}^{d-1} p_l \\
&= (p_i p_j)^{\frac{1}{2}} - 2(p_i p_j)^{\frac{1}{2}}(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1}) + (p_i p_j)^{\frac{1}{2}}(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-2})(1-p_0) \\
&= (p_i p_j)^{\frac{1}{2}}[1 - 2(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1} + (1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1}(1-p_0^{\frac{1}{2}})] \\
&= (p_i p_j)^{\frac{1}{2}}[\tfrac{1-p_0^{\frac{1}{2}}-2+1-p_0^{\frac{1}{2}}}{1+p_0^{\frac{1}{2}}}] = 0
\end{aligned}$$

3. Cuando , $i = 0$ y $j \geq 1$

$$\begin{aligned}
U^*()U(i,j) &= \sum_{l=0}^{d-1} U^*(0,l)U(l,j) = U^*(0,0)U(0,j) + \sum_{l\geq 1} U^*(0,l)U(l,j) \\
&= (p_0p_j)^{\frac{1}{2}} + \sum_{l\geq 1}(-p_l^{\frac{1}{2}})U(l,j) \\
&= (p_0p_j)^{\frac{1}{2}} - p_j^{\frac{1}{2}}(1 - p_j(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1}) - \sum_{\substack{l\geq 1\\ l\neq j}} p_l^{\frac{1}{2}}(-(p_lp_j)^{\frac{1}{2}}(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1}) \\
&= (p_0p_j)^{\frac{1}{2}} - p_j^{\frac{1}{2}} + p_jp_j^{\frac{1}{2}}(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1} - p_j^{\frac{1}{2}}(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1}\sum_{\substack{l\geq 1\\ l\neq j}} p_l \\
&= (p_0p_j)^{\frac{1}{2}} - p_j^{\frac{1}{2}} + p_j^{\frac{1}{2}}(1+p_0^{\frac{1}{2}})^{-1}(1-p_0) \\
&= (p_0p_j)^{\frac{1}{2}} - p_j^{\frac{1}{2}} + p_j^{\frac{1}{2}}(1-p_0^{\frac{1}{2}})^{-1} = 0
\end{aligned}$$

por lo tanto U es unitaria.

Así se define el *-homomorfismo unitario

$$\theta : f \to ((\theta_j^i(f))) = U \begin{pmatrix} f\circ\phi_0 & & & 0 \\ & f\circ\phi_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f\circ\phi_{d-1} \end{pmatrix} U^* \tag{3.13}$$

de $\mathcal{B}_0$ en $\mathcal{B}_0 \otimes B(\mathscr{H})$ tal que

$$\theta_j^i(f) = \sum_{r=0}^{d-1} u_{ir}\overline{u}_{jr} f\circ\phi_r,$$

$$\theta_0^0(f) = Tf$$

donde T esta definido en (3.12).
Hay que notar que el lado derecho de la ecuación (3.13), $\theta(f)$ es operador de multiplicación de matrices, es decir, si $(\mu_1,\ldots,\mu_d)^T \in L^2(\mu)\oplus\cdots\oplus L^2(\mu)$, $\theta(f)(\mu_1,\ldots,\mu_d)^T$ es la multiplicación de matrices, puesto que

$$L^2(\mu)\otimes\mathbb{C}^d = \underbrace{L^2(\mu)\oplus\cdots\oplus L^2(\mu)}_{d-veces}$$

mediante el isomorfismo $f\otimes\alpha \mapsto (\alpha_0 f,\ldots,\alpha_{d-1}f)$ con $f\in L^2(\mu)$ y $\alpha\in\mathbb{C}^d$.

Por la proposiciones (3.1.21) y (3.1.25) existe un flujo cuántico $\{j_n : n \geq 0\}$ de $*$-homomorfismos unitarios de $\mathcal{B}_0$ en $\mathcal{B}$, inducido por el $*$-homomorfismo unitario θ de (3.13) que satisface

$$[j_m(f), j_n(g)] = 0,$$

$$\mathbb{E}_{n-1]}j_n(f) = j_{n-1}(Tf)$$

para todo $f, g \in \mathcal{B}_0 = L^\infty(\mu)$. Si S es un conjunto finito o numerable y μ es la medida de conteo, entonces para cualquier $x \in S$, en la teoría cuántica el estado $\delta_x \otimes e_0 \otimes e_0 \cdots \in L^2(\mu) \otimes \mathscr{H} \otimes \mathscr{H} \otimes \cdots$ y la sucesión de observables tienen la misma probabilidad de distribución que la sucesión de variables aleatorias $f(\xi_0(x,\omega)), \ldots, f(\xi_n(x,\omega)), \ldots$ donde $\{\xi_n(x,\omega)\}$ es una cadena de Markov a tiempo discreto con espacio de estados S, $\xi_0(x,\omega) = x$ y operador de transición T, f es cualquier elemento de $\mathcal{B}_0$. En otras palabras $\{j_n\}$ puede ser identificado como un flujo estocástico Markoviano clásico con operador de transición T.

Es interesante notar que en la cuantización de una cadena de Markov clásica se tiene lo siguiente, nos limitamos a $\{j_n; 0 \leq n \leq N\}$ para cualquier tiempo finito en el espacio de Hilbert $\mathscr{H}_0 \otimes \mathscr{H}^{\otimes n}$ y se define la esperanza condicional $\mathbb{E}^{\varphi}_{n]}$ con respecto a un vector unitario φ arbitrario, en $\mathscr{H}$ reemplazando a e_0, se tiene un flujo estocástico con la propiedad

$$\mathbb{E}^{\varphi}_{n_0]} j_{n_1}(f_1) j_{n_2}(f_2) \cdots j_{n_k}(f_k) = j_{n_0}(T_\varphi^{n_1-n_0}(f_1 T_\varphi^{n_2-n_1}(f_2 \cdots (f_{k-1} T_\varphi^{n_k-n_{k-1}}(f_k)) \cdots).$$

para todo $0 \leq n_0 < n_1 < \cdots < n_k \leq N$ donde T_φ es el operador de transición de Markov

$$T_\varphi f = \sum_{j=0}^{d-1} |\langle e_j, U(\cdot)\varphi\rangle|^2 f \circ \phi_j.$$

T_φ describe la cadena donde los estados cambian de x a uno de los estados $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_{d-1}(x)$ con probabilidades $|\langle e_j, U(x)\varphi\rangle|^2, j = 0, 1, \ldots, d-1$ respectivamente. Así la descripción probabilística cuántica nos permite describir una gran parte de cadenas de markov con operadores de transición $T_\varphi, \varphi \in \mathscr{H}, \|\varphi\| = 1$ en el marco de un único espacio de Hilbert $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}^{\otimes n}$ si nos limitamos al periodo de tiempo finito $[0, N]$.

Ejemplo 3.2.2. En el ejemplo anterior hagamos $d = 2$, denotemos a las transformaciones ϕ_0, ϕ_1 sobre S por ϕ, φ respectivamente. Sean $p_0 = p, p_1 = q$ tal que $p + q = 1$, así

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{p} & \sqrt{q} \\ -\sqrt{q} & \sqrt{p} \end{pmatrix}$$

entonces el *-homomorfismo θ en (3.13) tiene la forma:

$$\begin{aligned}
\theta(f) = ((\theta^i_j(f))) &= U \begin{pmatrix} f \circ \phi & 0 \\ 0 & f \circ \varphi \end{pmatrix} U^* \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{p} & \sqrt{q} \\ -\sqrt{q} & \sqrt{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \circ \phi & 0 \\ 0 & f \circ \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p} & -\sqrt{q} \\ \sqrt{q} & \sqrt{p} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{p} & \sqrt{q} \\ -\sqrt{q} & \sqrt{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p} f \circ \phi & -\sqrt{q} f \circ \phi \\ \sqrt{q} f \circ \varphi & \sqrt{p} f \circ \varphi \end{pmatrix} \qquad (3.14) \\
&= \begin{pmatrix} p f \circ \phi + q f \circ \varphi & \sqrt{pq} f \circ \varphi - \sqrt{pq} f \circ \phi \\ \sqrt{pq} f \circ \varphi - \sqrt{pq} f \circ \phi & q f \circ \phi + p f \circ \varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p f \circ \phi + q f \circ \varphi & \sqrt{pq}(f \circ \varphi - f \circ \phi) \\ \sqrt{pq}(f \circ \varphi - f \circ \phi) & q f \circ \phi + p f \circ \varphi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Se define:

$$a_n = 1_{n-1]} \otimes |e_0\rangle\langle e_1| \otimes 1_{[n+1}$$

$$a'_n = 1_{n-1]} \otimes |e_1\rangle\langle e_0| \otimes 1_{[n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

así que

$$\begin{aligned}
a_n a'_n &= (1_{n-1]} \otimes |e_0\rangle\langle e_1| \otimes 1_{[n+1})(1_{n-1]} \otimes |e_1\rangle\langle e_0| \otimes 1_{[n+1}) \\
&= 1_{n-1]} \otimes |e_0\rangle\langle e_1||e_1\rangle\langle e_0| \otimes 1_{[n+1} \\
&= 1_{n-1]} \otimes |e_0\rangle\langle |e_1\rangle\langle e_0|^* e_1| \otimes 1_{[n+1} \\
&= 1_{n-1]} \otimes |e_0\rangle\langle |e_0\rangle\langle e_1|e_1| \otimes 1_{[n+1} \\
&= 1_{n-1]} \otimes |e_0\rangle\langle\langle e_1, e_1\rangle e_0| \otimes 1_{[n+1} \\
&= 1_{n-1]} \otimes |e_0\rangle\langle e_0| \otimes 1_{[n+1}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
a'_n a_n &= (1_{n-1]} \otimes |e_1\rangle\langle e_0| \otimes 1_{[n+1})(1_{n-1]} \otimes |e_0\rangle\langle e_1| \otimes 1_{[n+1}) \\
&= 1_{n-1]} \otimes |e_1\rangle\langle e_0||e_0\rangle\langle e_1| \otimes 1_{[n+1} \\
&= 1_{n-1]} \otimes |e_1\rangle\langle |e_0\rangle\langle e_1|^* e_0| \otimes 1_{[n+1} \\
&= 1_{n-1]} \otimes |e_1\rangle\langle |e_1\rangle\langle e_0|e_0| \otimes 1_{[n+1} \\
&= 1_{n-1]} \otimes |e_1\rangle\langle\langle e_0, e_0\rangle e_1| \otimes 1_{[n+1} \\
&= 1_{n-1]} \otimes |e_1\rangle\langle e_1| \otimes 1_{[n+1}
\end{aligned}$$

por lo que se tiene

$$\begin{aligned}
a_n a'_n + a'_n a_n &= 1_{n-1]} \otimes |e_0\rangle\langle e_0| \otimes 1_{[n+1} \quad + \quad 1_{n-1]} \otimes |e_1\rangle\langle e_1| \otimes 1_{[n+1} \\
&= 1_{n-1]} \otimes |e_0\rangle\langle e_0| + |e_1\rangle\langle e_1| \otimes 1_{[n+1} \\
&= 1_{n-1]} \otimes 1 \otimes 1_{[n+1} = 1
\end{aligned}$$

entonces el flujo estocástico $\{j_n, n \geq 0\}$ tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}
j_0(f) &= f \otimes 1_{[1} \\
j_1(f) &= j_0(\theta_0^0(f))1_{0]} \otimes |e_0\rangle\langle e_0| \otimes 1_{[2} \\
&+ j_0(\theta_0^1(f))1_{0]} \otimes |e_1\rangle\langle e_0| \otimes 1_{[2} \\
&+ j_0(\theta_1^0(f))1_{0]} \otimes |e_0\rangle\langle e_1| \otimes 1_{[2} \\
&+ j_0(\theta_1^1(f))1_{0]} \otimes |e_1\rangle\langle e_1| \otimes 1_{[2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
j_n(f) &= \sum_{0\le i,k\le 1} j_{n-1}(\theta_k^i(f))1_{n-1]}\otimes|e_i\rangle\langle e_k|\otimes 1_{[n+1} \\
&= j_{n-1}(\theta_0^0(f))1_{n-1]}\otimes|e_0\rangle\langle e_0|\otimes 1_{[n+1} \\
&+ j_{n-1}(\theta_0^1(f))1_{n-1]}\otimes|e_1\rangle\langle e_0|\otimes 1_{[n+1} \\
&+ j_{n-1}(\theta_1^0(f))1_{n-1]}\otimes|e_0\rangle\langle e_1|\otimes 1_{[n+1} \\
&+ j_{n-1}(\theta_1^1(f))1_{n-1]}\otimes|e_1\rangle\langle e_1|\otimes 1_{[n+1}
\end{aligned}
$$

observemos que

1.
$$j_{n-1}(\theta_0^0(f))1_{n-1]}\otimes|e_0\rangle\langle e_0|\otimes 1_{[n+1} =$$
$$= (j_{n-1}(\theta_0^0(f))\otimes 1_{[n})(1_{n-1]}\otimes|e_0\rangle\langle e_0|\otimes 1_{[n+1}) = (j_{n-1}(\theta_0^0(f))\otimes 1_{[n})a_na_n'$$

2.
$$(j_{n-1}(\theta_0^0(f))\otimes 1_{[n})a_na_n' + (j_{n-1}(\theta_0^0(f))\otimes 1_{[n})a_n'a_n =$$
$$= (j_{n-1}(\theta_0^0(f))\otimes 1_{[n})(a_na_n'+a_n'a_n) = j_{n-1}(\theta_0^0(f))\otimes 1_{[n} = j_{n-1}(\theta_0^0(f))$$

3.
$$(j_{n-1}(\theta_1^1(f))\otimes 1_{[n})a_n'a_n - (j_{n-1}(\theta_0^0(f))\otimes 1_{[n})a_n'a_n =$$
$$= (j_{n-1}(\theta_1^1(f)) - j_{n-1}(\theta_0^0(f)))\otimes 1_{[n}))a_n'a_n = (j_{n-1}(\theta_1^1(f)-\theta_0^0(f)))\otimes 1_{[n}))a_n'a_n$$
$$= (j_{n-1}(qf\circ\phi + pf\circ\varphi - pf\circ\phi - qf\circ\varphi)\otimes 1_{[n})a_n'a_n$$
$$= (j_{n-1}(q(f\circ\phi - f\circ\varphi) + p(f\circ\varphi - f\circ\phi))\otimes 1_{[n})a_n'a_n$$
$$= (j_{n-1}((q-p)(f\circ\phi - f\circ\varphi))\otimes 1_{[n})a_n'a_n$$

4.
$$(j_{n-1}(\theta_1^0(f))\otimes 1_{[n})a_n + (j_{n-1}(\theta_0^1(f))\otimes 1_{[n})a_n' =$$
$$= (j_{n-1}(\theta_1^0(f))\otimes 1_{[n})(a_n+a_n') = (j_{n-1}(\sqrt{pq}(f\circ\varphi - f\circ\phi))\otimes 1_{[n})(a_n+a_n')$$

Por lo tanto
$$j_n(f) = j_{n-1}(Tf) + j_{n-1}(Lf)(a_n+a_n') + j_{n-1}(Kf)a_n'a_n \tag{3.15}$$
donde
$$
\begin{aligned}
Tf &= pf\circ\phi + qf\circ\varphi \\
Lf &= \sqrt{pq}(f\circ\varphi - f\circ\phi) \\
Kf &= (p-q)\{f\circ\varphi - f\circ\phi\}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.2.3. *(Hipergeométrico)* Considérese una urna con a bolas blancas y b bolas negras. Tómese una bola al azar sucesivamente sin reemplazo. Los estados de la cadena de Markov en cualquier tiempo los denotamos por (x, y) donde x es el número de bolas blancas y y es el número de bolas negras. Entonces $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\}$ es el espacio de estados.
Se definen las transformaciones ϕ, φ sobre S por

$$\phi(x,y) = \begin{cases} (x-1, y) & \text{si} \quad x > 0 \\ (0, y-1) & \text{si} \quad x = 0, y > 0 \\ (0,0) & \text{si} \quad x = 0, y = 0. \end{cases}$$

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} (x, y-1) & \text{si} \quad y > 0 \\ (x-1, 0) & \text{si} \quad y = 0, x > 0 \\ (0,0) & \text{si} \quad x = 0, y = 0. \end{cases}$$

Se define

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x+y} & \text{si} \quad x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

$$q(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x+y} & \text{si} \quad y > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad y = 0. \end{cases}$$

Calculemos $\theta_0^0, \theta_0^1, \theta_1^0$ y θ_1^1

$$Tf(x,y) = \theta_0^0(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x+y} f(x-1,y) + \frac{y}{x+y} f(x, y-1) & \text{si} \quad x > 0, y > 0 \\ f(x-1, 0) & \text{si} \quad x > 0, y = 0 \\ f(0, y-1) & \text{si} \quad x = 0, y > 0 \\ f(0,0) & \text{si} \quad x = 0, y = 0. \end{cases}$$

$$\theta_1^0(x,y) = \theta_0^1(x,y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{x+y}\frac{y}{x+y}}(f(x,y-1) - f(x-1,y)) & \text{si} \quad x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0, y = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, y > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, y = 0. \end{cases}$$

$$\theta_1^1(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x+y} f(x-1,y) + \frac{x}{x+y} f(x,y-1) & \text{si} \quad x>0, y>0 \\ f(x-1,0) & \text{si} \quad x>0, y=0 \\ f(0,y-1) & \text{si} \quad x=0, y>0 \\ f(0,0) & \text{si} \quad x=0, y=0. \end{cases}$$

A la familia $\{j_n\}$ de (3.15) inducidos por los $*$-homomorfismos θ_i^j se le conoce como *Cadena Hipergeométrica de Markov cuántica*.

Ejemplo 3.2.4. *(Ehrenfest)* Hay dos urnas, una con a bolas y la otra con b bolas, de tal manera que $a+b=c$. Una de las c bolas se escoge al azar y se cambia de su urna a la otra. El estado del sistema es el número de bolas que hay en la primera urna entonces

$$S = \{0,1,2,\ldots,c\}$$

Se definen las transformaciones ϕ, φ sobre S por

$$\phi(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x>0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0. \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x<c \\ c-1 & \text{si} \quad x=c. \end{cases}$$

Se define

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{c} & \text{si} \quad 0<x<c \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x=0 \text{ o } x=c. \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} \frac{c-x}{c} & \text{si} \quad 0<x<c \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x=0 \text{ o } x=c. \end{cases}$$

Calculemos $\theta_0^0, \theta_0^1, \theta_1^0$ y θ_1^1

$$Tf(x) = \theta_0^0(f)(x) = \begin{cases} \frac{x}{c} f(x-1) + \frac{c-x}{c} f(x+1) & \text{si} \quad 0<x<c \\ \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{2} f(c-1) & \text{si} \quad x=0 \text{ o } x=c. \end{cases}$$

$$\theta_1^0(x) = \theta_0^1(f)(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x(c-x)}}{c} (f(x+1) - f(x-1)) & \text{si} \quad 0<x<c \\ \frac{1}{2} (f(c-1) - f(1)) & \text{si} \quad x=0 \text{ o } x=c. \end{cases}$$

$$\theta_1^1(f)(x) = \begin{cases} \frac{c-x}{c} f(x-1) + \frac{x}{c} f(x+1) & \text{si} \quad 0 < x < c \\ \\ \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{2} f(c-1) & \text{si} \quad x = 0 \text{ o } x = c. \end{cases}$$

A los $*$-homomorfismo unitarios $\{j_n\}$ inducidos por la (3.15) se le conoce como *Cadena Ehrenfest de Markov cuántica*.

Ejemplo 3.2.5. *(Cadena de nacimiento y muerte)* Sea $d = 3$ el numero de transiciones supongamos también que la cardinalidad del espacio de estados es C. Sea P_{ij} la matriz de transición de la cadena clásica de nacimiento y muerte entonces tiene la siguiente forma:

$$P_{ij} = \begin{cases} \mathbf{p}_i & \text{si} \quad j = i+1 \\ r_i & \text{si} \quad j = i \\ q_i & \text{si} \quad j = i-1 \\ 0 & \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

donde $\mathbf{p}_i + r_i + q_i = 1$.

Sean ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 dados por:

$$\phi_0(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \in \{0, \dots, C-1\} \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\phi_1(x) = x$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \in \{1, \dots, C-1\} \\ C-1 & \text{si} \quad x = C \end{cases}$$

Sean

$$p_0(x) = \begin{cases} q_x & \text{si} \quad 0 < x < C \\ \\ \alpha & \text{si} \quad x = 0 \\ \\ \beta & \text{si} \quad x = C. \end{cases}$$

$$p_1(x) = r_x \text{ para toda } x = 0, \dots, C$$

$$p_2(x) = 1 - p_0(x) - p_1(x).$$

Entonces

$$U = \begin{pmatrix} p_0^{\frac{1}{2}}(x) & p_1^{\frac{1}{2}}(x) & p_2^{\frac{1}{2}}(x) \\ -p_1^{\frac{1}{2}}(x) & 1 - \frac{p_1(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}(x)} & -\frac{(p_2(x)p_1(x))^{\frac{1}{2}}}{1+p_0^{\frac{1}{2}}(x)} \\ -p_2^{\frac{1}{2}}(x) & -\frac{(p_2(x)p_1(x))^{\frac{1}{2}}}{1+p_0^{\frac{1}{2}}(x)} & 1 - \frac{p_2(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}(x)} \end{pmatrix}$$

y

$$U^* = \begin{pmatrix} p_0^{\frac{1}{2}}(x) & -p_1^{\frac{1}{2}}(x) & -p_2^{\frac{1}{2}}(x) \\ p_1^{\frac{1}{2}}(x) & 1 - \frac{p_1(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}(x)} & -\frac{(p_2(x)p_1(x))^{\frac{1}{2}}}{1+p_0^{\frac{1}{2}}(x)} \\ p_2^{\frac{1}{2}}(x) & -\frac{(p_2(x)p_1(x))^{\frac{1}{2}}}{1+p_0^{\frac{1}{2}}(x)} & 1 - \frac{p_2(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}(x)} \end{pmatrix}$$

así obtenemos el *-homomorfismo θ

$$\begin{aligned}
\theta_0^0(f)(x) &= f(\phi_0(x))p_0(x) + f(\phi_1(x))p_1(x) + f(\phi_2(x))p_2(x) \\
\theta_0^1(f)(x) &= -f(\phi_0(x))(p_0(x)p_1(x))^{\frac{1}{2}} + f(\phi_1(x))p_1^{\frac{1}{2}}(x)(1 - \tfrac{p_1(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}}) - \tfrac{f(\phi_2(x))p_2(x)(p_1(x))^{\frac{1}{2}}}{(1+p_0^{\frac{1}{2}})} \\
\theta_0^2(f)(x) &= -f(\phi_0(x))(p_0(x)p_2(x))^{\frac{1}{2}} - \tfrac{f(\phi_1(x))p_1(x)p_2^{\frac{1}{2}}(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}} + f(\phi_2(x))p_2^{\frac{1}{2}}(x)(1 - \tfrac{p_2(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}}) \\
\theta_1^0(f)(x) &= -f(\phi_0(x))(p_0(x)p_1(x))^{\frac{1}{2}} + f(\phi_1(x))p_1^{\frac{1}{2}}(x)(1 - \tfrac{p_1(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}}) - \tfrac{f(\phi_2(x))p_2(x)(p_1(x))^{\frac{1}{2}}}{(1+p_0^{\frac{1}{2}})} \\
\theta_1^1(f)(x) &= f(\phi_0(x))p_1(x) + f(\phi_1(x))(1 - \tfrac{p_1(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}})^2 + \tfrac{f(\phi_2(x))p_1(x)p_2(x)}{(1+p_0^{\frac{1}{2}})^2} \\
\theta_1^2(f)(x) &= f(\phi_0(x))(p_2(x)p_1(x))^{\frac{1}{2}} - \frac{f(\phi_1(x))(p_2(x)p_1(x))^{\frac{1}{2}}(1-\frac{p_1(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}})}{1+p_0^{\frac{1}{2}}} - \frac{f(\phi_2(x))(p_2(x)p_1(x))^{\frac{1}{2}}(1-\frac{p_2(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}})}{1+p_0^{\frac{1}{2}}} \\
\theta_2^0(f)(x) &= -f(\phi_0(x))(p_0(x)p_2(x))^{\frac{1}{2}} - \tfrac{f(\phi_1(x))p_1(x)p_2^{\frac{1}{2}}(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}} + f(\phi_2(x))p_2^{\frac{1}{2}}(x)(1 - \tfrac{p_2(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}}) \\
\theta_2^1(f)(x) &= f(\phi_0(x))(p_2(x)p_1(x))^{\frac{1}{2}} - \frac{f(\phi_1(x))(p_2(x)p_1(x))^{\frac{1}{2}}(1-\frac{p_1(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}})}{1+p_0^{\frac{1}{2}}} - \frac{f(\phi_2(x))(p_2(x)p_1(x))^{\frac{1}{2}}(1-\frac{p_2(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}})}{1+p_0^{\frac{1}{2}}} \\
\theta_2^2(f)(x) &= f(\phi_0(x))p_2(x) + \tfrac{f(\phi_1(x))p_1(x)p_2(x)}{(1+p_0^{\frac{1}{2}})^2} + f(\phi_2(x))(1 - \tfrac{p_2(x)}{1+p_0^{\frac{1}{2}}})^2
\end{aligned}$$

$$
\theta_0^0(f)(x) \;=\; \begin{cases} q_x f(x-1) + \mathbf{p}_x f(x+1) + r_x f(x) & \text{si} \quad 0 < x < c \\ \mathbf{p}_x f(1) + r_0 f(0) & \text{si} \quad x = 0 \\ q_c f(c-1) + r_c f(c) & \text{si} \quad x = c. \end{cases}
$$

$$
\theta_0^1(f)(x) \;=\; \begin{cases} \frac{q_x^{\frac{1}{2}}(f(x-1)-f(x-1))+q_x(f(x+1)-f(x-1))-(r_x-1)(f(x+1)-f(x-1))}{a+q_x^{\frac{1}{2}}}(r_x^{\frac{1}{2}}) & \text{si} \quad 0 < x < c \\ \frac{(f(0)-f(1))(\mathbf{p}_0+\alpha^{\frac{1}{2}})}{1+\alpha^{\frac{1}{2}}}(r_0^{\frac{1}{2}}) & \text{si} \quad x = 0 \\ (f(c-1) - f(c))(q_c + \beta^{\frac{1}{2}})\frac{r_c^{\frac{1}{2}}}{1+\beta^{\frac{1}{2}}} & \text{si} \quad x = C. \end{cases}
$$

$$\theta_0^2(f)(x) = \begin{cases} \frac{\mathbf{p}_x^{\frac{1}{2}}}{1+q_x^{\frac{1}{2}}}((f(x+1)-f(x-1))(q_x^{\frac{1}{2}}+q_x)-(f(x+2)-f(x))) & \text{si} \quad 0<x<c \\ \frac{(f(1)-f(0))(\mathbf{p}_0-\alpha)^{\frac{1}{2}}r_0}{1-\alpha^{\frac{1}{2}}} & \text{si} \quad x=0 \\ \frac{(-f(c-1)+f(c))(\mathbf{p}_c-\beta)^{\frac{1}{2}}}{1+\beta^{\frac{1}{2}}} & \text{si} \quad x=C. \end{cases}$$

$$\theta_1^1(f)(x) = \begin{cases} r_x f(x+1) + \frac{\mathbf{p}_x r_x f(x-1)}{(1+q_x^{\frac{1}{2}})^2} + f(x)(-1+\frac{r_x}{1+q_x^{\frac{1}{2}}})^2 & \text{si} \quad 0<x<c \\ f(0) - \frac{2(f(0)-f(1))r_0}{1+\alpha^{\frac{1}{2}}} + \frac{r_0^2(f(0)-f(1))}{(1+\alpha^{\frac{1}{2}})^2} & \text{si} \quad x=0 \\ f(c) + \frac{2(f(c-1)-f(c))r_c}{1+\beta^{\frac{1}{2}}} + \frac{r_c^2(f(c-1)-f(c))}{(1+\beta^{\frac{1}{2}})^2} & \text{si} \quad x=C. \end{cases}$$

$$\theta_1^2(f)(x) = \begin{cases} \frac{\mathbf{p}_x^{\frac{1}{2}}}{1+q_x^{\frac{1}{2}}}[(f(x+1)-f(x-1))(q_x^{\frac{1}{2}}+q_x)+(f(x+1)-f(x))r_x] & \text{si} \quad 0<x<c \\ -\frac{(\mathbf{p}_0+\alpha^{\frac{1}{2}})(\mathbf{p}_0-\alpha)^{\frac{1}{2}}r_0^{\frac{1}{2}}}{(1+\alpha^{\frac{1}{2}})^2}(f(0)-f(1)) & \text{si} \quad x=0 \\ \frac{(q_c-\beta^{\frac{1}{2}})(\mathbf{p}_c-\beta)^{\frac{1}{2}}r_c^{\frac{1}{2}}}{(1+\beta^{\frac{1}{2}})^2}(f(c-1)-f(c)) & \text{si} \quad x=C. \end{cases}$$

$$\theta_2^2(f)(x) = \begin{cases} \mathbf{p}_x f(x-1) + \frac{r_x \mathbf{p}_x}{(1+q_x^{\frac{1}{2}})^2} f(x) + (1-\frac{\mathbf{p}_x}{1-q_x^{\frac{1}{2}}})^2 f(x+1) & \text{si} \quad 0<x<c \\ f(1) + \frac{1-\alpha^{\frac{1}{2}}}{1+\alpha^{\frac{1}{2}}} r_0(f(0)-f(1)) + r_0^2(f(1)-f(0)) & \text{si} \quad x=0 \\ f(c-1) + (f(c-1)-f(c))(r_c^2 - (\frac{1-\beta^{\frac{1}{2}}}{1+\beta^{\frac{1}{2}}})r_c) & \text{si} \quad x=C. \end{cases}$$

Además tenemos que $\theta_0^1 = \theta_1^0, \theta_0^2 = \theta_2^0, \theta_1^2 = \theta_2^1$, entonces el flujo estocástico $\{j_n\}$ inducido por θ se le llama *cadena de nacimiento y muerte cuántica*.

Capítulo 4

Procesos Estocásticos Cuánticos

A partir de este capitulo nos basamos en el articulo de Accardi [3] donde se presenta de manera mas general la definición de proceso estocástico cuántico sobre C^*-álgebras y algebras de Von Neumann.

4.1. Procesos Estocásticos

Proposición 4.1.1. *(Representación G-N-S) Sea $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ una función lineal, positiva ($\varphi(a^*a) > 0$),continua en la topología débil, entonces existe $(\mathscr{H}_\varphi, \pi_\varphi, \Omega_\varphi)$ donde:*

a) $(\mathscr{H}_\varphi, \langle,\rangle)$ *es un espacio de Hilbert con producto interno* $\langle,\rangle$ *y* π_φ *es un $*$-homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $B(\mathscr{H})$.*

b) $\Omega_\varphi \in \mathscr{H}_\varphi$ *y* $\mathscr{H}_\varphi = \overline{\pi_\varphi(\mathcal{A})\Omega_\varphi}$.

c) $\varphi(a) = \langle \pi_\varphi(a)\Omega_\varphi, \Omega_\varphi\rangle$ *para todo $a \in \mathcal{A}$.*

Sea $\mathfrak{B}$ una C^*-álgebra con identidad y sea T un conjunto.

Definición 4.1.2. Un *proceso estocástico sobre $\mathfrak{B}$ indexado por T* es una tripleta $(\mathcal{A}, \{j_t : t \in T\}, \omega)$, donde $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra con identidad y para cada $t \in T$, j_t es un *-homomorfismo de $\mathfrak{B}$ en $\mathcal{A}$ con $j_t(1_{\mathfrak{B}}) = 1_{\mathcal{A}}$. $\mathcal{A}$ es generada por las álgebras imagen $\{A_t = j_t(\mathcal{A}) : t \in T\}$ y ω es un estado sobre $\mathcal{A}$.

Sea (H, π, Ω) la terna GNS asociada a $(\mathcal{A}, \omega)$.

Definición 4.1.3. Dos procesos estocásticos $(\mathcal{A}^{(i)}, \{j_t^{(i)}\}, \omega^{(i)}),\ \ i = 1, 2$ sobre la misma C^*-álgebra $\mathbb{B}$, e indexadas por el mismo conjunto T. Se dicen *equivalentes* si existe un operador unitario $U : \mathscr{H}^{(1)} \to \mathscr{H}^{(2)}$ tal que $U\Omega^{(1)} = \Omega^{(2)}$ y

$$U\pi^{(1)}j_t^{(1)}(b) = \pi^{(2)}j_t^{(2)}(b)U$$

para todo $b \in \mathfrak{B}, t \in T$.

Proposición 4.1.4. *Dos procesos estocásticos* $(\mathcal{A}^{(i)}, \{j_t^{(i)}\}, \omega^{(i)}),\ \ i = 1, 2$ *sobre la misma* C^**-álgebra* $\mathbb{B}$*, e indexadas por el mismo conjunto* T *son equivalentes si y sólo si*

$$\omega^{(1)}(j_{t_1}^{(1)}(a_1)^* \cdots j_{t_n}^{(1)}(a_n)^* j_{t_n}^{(1)}(b_n) \cdots j_{t_1}^{(1)}(b_1)) = \omega^{(2)}(j_{t_1}^{(2)}(a_1)^* \cdots j_{t_n}^{(2)}(a_n)^* j_{t_n}^{(2)}(b_n) \cdots j_{t_1}^{(2)}(b_1)) \tag{4.1}$$

para todo $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{B},\ \ t_1, \ldots, t_n \in T$ *y para toda* n*.*

Demostración: $\Leftarrow$) Supóngase que (4.1) se cumple, así se define la siguiente transformación $U : S_1 \to S_2$ donde S_1, S_2 son subconjuntos totales en $\mathscr{H}^{(1)}, \mathscr{H}^{(2)}$ respectivamente, dado por

$$U(\pi^{(1)} j_{t_n}^{(1)}(b_n) \cdots \pi^{(1)} j_{t_1}^{(1)}(b_1)) = \pi^{(2)} j_{t_n}^{(2)}(b_n) \cdots \pi^{(2)} j_{t_1}^{(2)}(b_1).$$

donde $(\mathscr{H}^{(i)}, \pi^{(i)}, \Omega^{(i)})$ son las ternas GNS asociadas a los procesos estocásticos $(\mathcal{A}^{(i)}, \{j_t^{(i)}\}, \omega(i))$ respectivamente. Además (4.1) implica que:

$$\begin{aligned}
&\omega^{(1)}(j_{t_1}^{(1)}(a_1)^* \cdots j_{t_n}^{(1)}(a_n)^* j_{t_n}^{(1)}(b_n) \cdots j_{t_1}^{(1)}(b_1)) = \\
&= \langle \Omega^{(1)}, \pi^{(1)}(j_{t_1}^{(1)}(a_1)^* \cdots j_{t_n}^{(1)}(a_n)^* j_{t_n}^{(1)}(b_n) \cdots j_{t_1}^{(1)}(b_1)) \Omega^{(1)} \rangle \\
&= \langle \Omega^{(2)}, \pi^{(2)}(j_{t_1}^{(2)}(a_1)^* \cdots j_{t_n}^{(2)}(a_n)^* j_{t_n}^{(2)}(b_n) \cdots j_{t_1}^{(2)}(b_1)) \Omega^{(2)} \rangle \\
&= \omega^{(2)}(j_{t_1}^{(2)}(a_1)^* \cdots j_{t_n}^{(2)}(a_n)^* j_{t_n}^{(2)}(b_n) \cdots j_{t_1}^{(2)}(b_1))
\end{aligned}$$

Veamos que la transformación U preserva el producto interior.
Sean

$$\begin{aligned}
x &= \pi^{(1)} j_{t_n}^{(1)}(b_n) \cdots \pi^{(1)} j_{t_1}^{(1)}(b_1) \Omega^{(1)} \\
y &= \pi^{(1)} j_{t_n}^{(1)}(a_n) \cdots \pi^{(1)} j_{t_1}^{(1)}(a_1) \Omega^{(1)}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\langle Ux, Uy \rangle &= \langle U(\pi^{(1)} j_{t_n}^{(1)}(b_n) \cdots \pi^{(1)} j_{t_1}^{(1)}(b_1) \Omega^{(1)}), U(\pi^{(1)} j_{t_n}^{(1)}(a_n) \cdots \pi^{(1)} j_{t_1}^{(1)}(a_1) \Omega^{(1)}) \rangle \\
&= \langle \pi^{(2)} j_{t_n}^{(2)}(b_n) \cdots \pi^{(2)} j_{t_1}^{(2)}(b_1) \Omega^{(2)}, \pi^{(2)} j_{t_n}^{(2)}(a_n) \cdots \pi^{(2)} j_{t_1}^{(2)}(a_1) \Omega^{(2)} \rangle \\
&= \langle \Omega^{(2)}, \pi^{(2)}(j_{t_1}^{(2)}(a_1)^* \cdots j_{t_n}^{(2)}(a_n)^* j_{t_n}^{(2)}(b_n) \cdots j_{t_1}^{(2)}(b_1)) \Omega^{(2)} \rangle \\
&= \langle \Omega^{(1)}, \pi^{(1)}(j_{t_1}^{(1)}(a_1)^* \cdots j_{t_n}^{(1)}(a_n)^* j_{t_n}^{(1)}(b_n) \cdots j_{t_1}^{(1)}(b_1)) \Omega^{(1)} \rangle \\
&= \langle \pi^{(1)} j_{t_n}^{(1)}(b_n) \cdots \pi^{(1)} j_{t_1}^{(1)}(b_1) \Omega^{(1)}, \pi^{(1)} j_{t_n}^{(1)}(a_n) \cdots \pi^{(1)} j_{t_1}^{(1)}(a_1) \Omega^{(1)} \rangle \\
&= \langle x, y \rangle
\end{aligned}$$

entonces existe una extensión $U : \mathscr{H}^{(1)} \to \mathscr{H}^{(2)}$ tal que $U\Omega^{(1)} = \Omega^{(2)}$ ya que si $n = 1$ tenemos $U(\pi^{(1)} j_{t_1}^{(1)}(b_1) \Omega^{(1)}) = \pi^{(2)} j_{t_1}^{(2)}(b_1) \Omega^{(2)}$ además si $b_1 = 1$, entonces $j_{t_1}^{(1)} = 1$ y $\pi^{(1)}(1) = 1$ por ser

$*$-homomorfismo, por lo tanto $U(\Omega^{(1)}) = \Omega^{(2)}$.

Por demostrar que $U\pi^{(1)}j_t^{(1)}(b) = \pi^{(2)}j_t^{(2)}(b)U$.

Como

$$U\pi^{(1)}j_t^{(1)}(b)\Omega^{(1)} = \pi^{(2)}j_t^{(2)}(b)U^{(2)} = \pi^{(2)}j_t^{(2)}(b)U\Omega^{(1)}$$

pero $\Omega^{(1)}$ es cíclico, es decir el conjunto $\{\pi^{(1)}j_{t_n}^{(1)}(a_n)\cdots\pi^{(1)}j_{t_1}^{(1)}(a_1)\Omega^{(1)} : n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_n \in T, b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{B}\}$ en denso en $\mathscr{H}^{(1)}$.

Solo basta probar

$$U\pi^{(1)}j_t^{(1)}(b)\pi^{(1)}j_{t_n}^{(1)}(b_n)\cdots\pi^{(1)}j_{t_1}^{(1)}(b_1)\Omega^{(1)} = \pi^{(2)}j_t^{(2)}(b)U(\pi^{(1)}j_{t_n}^{(1)}(b_n)\cdots\pi^{(1)}j_{t_1}^{(1)}(b_1)\Omega^{(1)}).$$

En efecto

$$U\pi^{(1)}j_t^{(1)}(b)\pi^{(1)}j_{t_n}^{(1)}(b_n)\cdots\pi^{(1)}j_{t_1}^{(1)}(b_1)\Omega^{(1)} =$$

$$= \pi^{(2)}j_t^{(2)}(b)\pi^{(2)}j_{t_n}^{(2)}(b_n)\cdots\pi^{(2)}j_{t_1}^{(2)}(b_1)\Omega^{(2)}$$

$$= \pi^{(2)}j_t^{(2)}(b)U(\pi^{(1)}j_{t_n}^{(1)}(b_n)\cdots\pi^{(1)}j_{t_1}^{(1)}(b_1)\Omega^{(1)})$$

$\Rightarrow$) Por inducción sobre n, sea $n = 1$, entonces por demostrar que

$$\omega^{(1)}(j_{t_1}^{(1)}(a_1)^* j_{t_1}^{(1)}(b_1)) = \omega^{(2)}(j_{t_1}^{(2)}(a_1)^* j_{t_1}^{(2)}(b_1)).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} U\pi^{(1)}j_{t_1}^{(1)}(a_1)^*\pi^{(1)}j_{t_1}^{(1)}(b_1) &= U\pi^{(1)}j_{t_1}^{(1)}(a_1)^*U^{-1}U\pi^{(1)}j_{t_1}^{(1)}(b_1) \\ &= \pi^{(2)}j_{t_1}^{(2)}(a_1)^*U\pi^{(1)}j_{t_1}^{(1)}(b_1) \\ &= \pi^{(2)}j_{t_1}^{(2)}(a_1)^*\pi^{(2)}j_{t_1}^{(2)}(b_1)U \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} \langle\Omega^{(2)}, \pi^{(2)}j_{t_1}^{(2)}(a_1)^*\pi^{(2)}j_{t_1}^{(2)}(b_1)\Omega^{(2)}\rangle_{\mathscr{H}^{(2)}} &= \langle U\Omega^{(1)}, \pi^{(2)}j_{t_1}^{(2)}(a_1)^*\pi^{(2)}j_{t_1}^{(2)}(b_1)U\Omega^{(1)}\rangle_{\mathscr{H}^{(2)}} \\ &= \langle\Omega^{(1)}, U^{-1}\pi^{(2)}j_{t_1}^{(2)}(a_1)^*\pi^{(2)}j_{t_1}^{(2)}(b_1)U\Omega^{(1)}\rangle_{\mathscr{H}^{(1)}} \\ &= \langle\Omega^{(1)}, \pi^{(1)}j_{t_1}^{(1)}(a_1)^*\pi^{(1)}j_{t_1}^{(1)}(b_1)\Omega^{(1)}\rangle_{\mathscr{H}^{(1)}} \end{aligned}$$

□

Definición 4.1.5. Un proceso estocástico se llama W^**-proceso estocástico* si $\mathfrak{B}$ es una W^*-álgebra y la transformación $\pi \circ j_t$ es normal, es decir que $\pi \circ j_t$ es σ-débil continuo.

Definición 4.1.6. Sea $\mathbf{T} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T^n$ el conjunto de todas las n-eadas de elementos de $\mathbf{T}$, $n = 1, 2, \ldots$; un elemento $\bar{t} \in \mathbf{T}$ esta en T^n para algún $n = n(\bar{t})$, el puede ser escrito como $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ para cada $\bar{t} \in \mathbf{T}$, sea $\mathfrak{B}_{\bar{t}}$, $n(\bar{t})$-veces el producto cartesiano de $\mathfrak{B}$ y se denota un elemento de $\mathfrak{B}_{\bar{t}}$ por $b = (b_1, \ldots, b_n)$ y sea $j_t : \mathfrak{B}_{\bar{t}} \to \mathcal{A}$ dado por

$$j_{\bar{t}}(b) = j_{t_n}(b_n) \cdots j_{t_1}(b_1).$$

El ***kernel de correlación*** W_t del proceso estocástico $(\mathcal{A}, \{j_t\}, \omega)$ sobre $\mathfrak{B}$ e indexado por T es la función sobre $\mathfrak{B}_{\bar{t}} \times \mathfrak{B}_{\bar{t}}$ con valores en $\mathbb{C}$ dada por

$$W_{\bar{t}}(a; b) = \omega(j_{\bar{t}}(a)^* j_{\bar{t}}(b)).$$

De acuerdo con la proposición 4.1.4, un proceso estocástico esta determinado mediante equivalencias por la familia $\{W_{\bar{t}} : \bar{t} \in \mathbf{T}\}$ de sus kernels de correlación.

Proposición 4.1.7. *La familia de $\{W_{\bar{t}}(\cdot, \cdot) : \bar{t} \in \boldsymbol{T}\}$ de kernels de correlación de un proceso estocástico sobre $\mathfrak{B}$, indexado por T, satisface las condiciones siguientes:*

KC1) (Proyectividad) Para todo $\bar{t} \in \boldsymbol{T}$, para cada k tal que $1 \leq k \leq n(\bar{t})$ y para cada $a, b \in \mathfrak{B}_{\bar{t}}$ tal que $a_k = b_k = 1$ se tiene que:

$$W_{\bar{t}}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = W_{\hat{k}\bar{t}}(\hat{k}\boldsymbol{a}; \hat{k}\boldsymbol{b})$$

donde $\hat{k}\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, \hat{a}_k, \ldots, a_n)$ y $\hat{k}\bar{t} = (t_1, \ldots, \hat{t}_{k-1}, \hat{t}_k, \hat{t}_{k+1}, \ldots, t_n)$, es decir se elimina la k-esima coordenada.

KC2) (Positividad) Para todo $\bar{t} \in \boldsymbol{T}$, para todas las sucesiones finitas $\{c_r \in \mathbb{C} : r = 1, \ldots, m\}$, $\{b_r \in \mathfrak{B}_{\bar{t}} : r = 1, \ldots, m\}$ se tiene

$$\sum_{i,l} \bar{c}_i c_l W_{\bar{t}}(\boldsymbol{b}_i; \boldsymbol{b}_l) \geq 0.$$

KC3) (Normalización) Para todo $\bar{t} \in \boldsymbol{T}$ se tiene

$$W_{\bar{t}}(1; 1) = 1$$

donde 1 se entiende como el elemento $(1, \ldots, 1) \in \mathfrak{B}_{\bar{t}}$.

KC4) (Sesquelineal) Para todo $\bar{t} \in \boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathfrak{B}_{\bar{t}}$ las transformaciones $b_k \mapsto W_{\bar{t}}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ de $\mathfrak{B}$ a los complejos, es lineal y $a_k \mapsto W_{\bar{t}}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ es conjugada lineal para cada k tal que $1 \leq k \leq n(\bar{t})$.

KC5) (-condición) Para todo $\bar{t} \in \boldsymbol{T}$ y todo $n = n(\bar{t})$ la transformación $(a_n, b_n) \mapsto W_{\bar{t}}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ de $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ a los complejos se factoriza a través de la transformación $(a_n, b_n) \mapsto a_n^* b_n$ de $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}$.*

KC6) (Multiplicatividad) Para todo $\bar{t} \in \boldsymbol{T}$ tal que $t_k = t_{k-1}$ se tiene

$$W_{\bar{t}}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = W_{\hat{k}\bar{t}}(\dot{k}\boldsymbol{a}; \dot{k}\boldsymbol{b})$$

para todo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathfrak{B}_{\bar{t}}$, donde $\dot{k}\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k a_{k-1}, \ldots, a_n) \in \mathfrak{B}_{\hat{k}\bar{t}}$ para $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, a_n) \in \mathfrak{B}_{\bar{t}}$.

Además para un W^*-proceso se cumple la condición

KCN) (Normalidad) Para todo $\bar{t} \in \boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{B}_{\bar{t}}$ tal que $a_n = 1, n = n(\bar{t})$ y para todo $\boldsymbol{b} \in \mathfrak{B}_{\bar{t}}$, la transformación $b_n \mapsto W_{\bar{t}}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ de $\mathfrak{B}$ a los complejos es una transformación normal.

Antes de la demostración veamos un ejemplo de la condición KC1) para aclarar ideas:

Sea $n = 3, k = 2$ entonces sea $(X, Y, Z) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ y $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$, sea $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = B(\mathbb{R})$, $\bar{t} = (1, 2, 3)$ tomemos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{B}_{\bar{t}} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$, $\mathbf{a}_k = \mathbf{b}_k = 1$ donde $\mathbf{a} = (a_1, 1, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, 1, b_3)$ por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} W_{\bar{t}}(\mathbf{a}; \mathbf{b}) &= \mathbb{E}(\overline{a_1(X)}\ \overline{a_2(1)}\ \overline{a_3(Z)} b_1(X) b_2(1) b_3(Z)) \\ &= \mathbb{E}(\overline{a_1(X)}\ \overline{a_3(Z)} b_1(X) b_3(Z)) \end{aligned}$$

entonces $W_{\hat{k}\bar{t}}(\hat{k}\mathbf{a}; \hat{k}\mathbf{b}) = \mathbb{E}(\overline{a_1(X)}\ \overline{a_3(Z)} b_1(X) b_3(Z))$ puesto que $\hat{k}\mathbf{a} = (a_1, a_3)$, $\hat{k}\mathbf{b} = (b_1, b_3)$ y $\hat{k}\bar{t} = (1, 3)$.

Demostración: $KC1$) Sea $\hat{k}\bar{t} = (t_1, \ldots, t_{k-1}, \hat{t}_k, \ldots, t_n)$, $\hat{k}\mathbf{a} = (a_1, \ldots, \hat{a}_k, \ldots, a_n)$ con $a_k = b_k = 1$, entonces

$$W_{\bar{t}}(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \omega(j_{\bar{t}}(\mathbf{a})^* j_{\bar{t}}(\mathbf{b}))$$

$$= \omega((j_{t_n}(a_n) \cdots j_{t_1}(a_1))^* j_{t_n}(b_n) \cdots j_{t_1}(b_1))$$

$$= \omega(j_{t_1}(a_1)^* \cdots j_{t_k}(1)^* \cdots j_{t_n}(a_n)^* j_{t_n}(b_n) \cdots j_{t_k}(1) \cdots j_{t_1}(b_1))$$

$$= \omega(j_{t_1}(a_1)^* \cdots j_{t_{k-1}}(a_{k-1})^* j_{t_{k+1}}(a_{k+1})^* \cdots j_{t_n}(a_n)^* j_{t_n}(b_n) \cdots j_{t_{k+1}}(b_{k+1}) j_{t_{k-1}}(b_{k-1}) \cdots j_{t_1}(b_1))$$

Por otro lado se tiene que

$$W_{\hat{k}\bar{t}}(\hat{k}\mathbf{a}; \hat{k}\mathbf{b}) = \omega(j_{\hat{k}\bar{t}}(\mathbf{a})^* j_{\hat{k}\bar{t}}(\mathbf{b}))$$

$$= \omega(j_{t_1}(a_1)^* \cdots j_{t_{k-1}}(a_{k-1})^* j_{t_{k+1}}(a_{k+1})^* \cdots j_{t_n}(a_n)^* j_{t_n}(b_n) \cdots j_{t_{k+1}}(b_{k+1}) j_{t_{k-1}}(b_{k-1}) \cdots j_{t_1}(b_1))$$

$KC2$) Utiizaremos un hecho mas general, sea $\mathcal{A}$ una álgebra de operadores, $a \in \mathcal{A}$ el funcional $b \mapsto a^* b a$ con $b \in \mathcal{A}$, entonces el funcional anterior es positivo. En efecto sea $b^* b \in \mathcal{A}$, entonces $b^*b \mapsto a^*b^*ba = (ba)^*ba \geq 0$ y por lo tanto el funcional es positivo.

$KC3)$ Sea $\bar{t} \in \mathbf{T}$, entonces

$$\begin{aligned} W_{\bar{t}}(1;1) &= \omega(j_{\bar{t}}(1)^* j_{\bar{t}}(1)) \\ &= \omega(j_{t_1}(1)^* \cdots j_{t_n}(1)^* j_{t_n}(1) \cdots j_{t_1}(1)) \\ &= \omega(1) = 1 \end{aligned}$$

$KC4)$ Sea $\bar{t} \in \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{B}_{\bar{t}}$, llamándole F a la transformación $b_k \mapsto W_{\bar{t}}(\mathbf{a};\mathbf{b})$ por demostrar $F(\alpha b_k + \beta c_k) = \alpha F(b_k) + \beta F(c_k)$.

$$\begin{aligned} F(\alpha b_k + \beta c_k) &= \omega(j_{t_1}(a_1)^* \cdots j_{t_n}(a_n)^* j_{t_n}(b_n) \cdots j_{t_k}(\alpha b_k + \beta c_k) \cdots j_{t_1}(b_1)) \\ &= \alpha\, \omega(j_{t_1}(a_1)^* \cdots j_{t_n}(a_n)^* j_{t_n}(b_n) \cdots j_{t_k}(b_k) \cdots j_{t_1}(b_1)) \\ &\quad + \beta\, \omega(j_{t_1}(a_1)^* \cdots j_{t_n}(a_n)^* j_{t_n}(b_n) \cdots j_{t_k}(c_k) \cdots j_{t_1}(b_1)) \\ &= \alpha\, F(b_k) + \beta\, F(c_k). \end{aligned}$$

De manera similar para la transformación $a_k \mapsto W_{\bar{t}}(\mathbf{a};\mathbf{b})$.

$KC5)$ Sea $\bar{t} \in \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{B}_{\bar{t}}$, llamándole F a la transformación $(a_n, b_n) \mapsto W_{\bar{t}}(\mathbf{a};\mathbf{b})$ y G a la transformación $(a_n, b_n) \mapsto a_n^* b_n$ entonces existe una transformación lineal $S : \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ tal que:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"] & \mathbb{C} \\ \mathfrak{B} \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

donde S esta dada por, $S(a_n^* b_n) = \omega(j_{t_1}(a_1)^* \cdots j_{t_n}(a_n^* b_n) \cdots j_{t_1}(b_1))$.

$KC6)$ Sea $\bar{t} \in \mathbf{T}$ tal que $t_k = t_{k-1}$ y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{B}_{\bar{t}}$, entonces

$$\begin{aligned} W_{\bar{t}}(\mathbf{a};\mathbf{b}) &= \omega(j_{t_1}(a_1)^* \cdots j_{t_{k-1}}(a_{k-1}) j_{t_k}(a_k) \cdots j_{t_n}(a_n)^* j_{t_n}(b_n) \cdots j_{t_k}(b_k) j_{t_{k-1}}(b_{k-1}) \cdots j_{t_1}(b_1)) \\ &= \omega(j_{t_1}(a_1)^* \cdots j_{t_{k-1}}(a_k a_{k-1})^* \cdots j_{t_n}(a_n)^* j_{t_n}(b_n) \cdots j_{t_{k-1}}(b_k b_{k-1}) \cdots j_{t_1}(b_1)) \\ &= W_{\hat{k}\bar{t}}(\dot{k}\mathbf{a}; \dot{k}\mathbf{b}). \end{aligned}$$

$KCN)$ Sea $\bar{t} \in \mathbf{T}$ y $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{B}_{\bar{t}}$ con $a_n = 1$, llamándole F a la transformación $b_n \mapsto W_{\bar{t}}(\mathbf{a};\mathbf{b})$, entonces F es una transformación normal puesto que es composición de transformaciones normales, más en especifico es composición de $\pi j_{t_n}(\cdot)$ que son normales para cada n.

$\square$

4.2. Teorema de Reconstrucción

Sea $\mathfrak{B}$ una C^*-álgebra con identidad $\mathbb{1}$ y T un conjunto. Un *sistema proyectivo de kernels de correlación* sobre $\mathfrak{B}$ indexados por T, es una familia $\{W_{\bar{t}} : \bar{t} \in \mathbf{T}\}$ de funciones $W_{\bar{t}} : \mathfrak{B}_{\bar{t}} \times \mathfrak{B}_{\bar{t}} \to \mathbb{C}$ tal que cumple con las condiciones $KC1$ hasta $KC6$. Si agregamos que $\mathfrak{B}$ es una W^*-álgebra y la condición KCN se cumple, entonces la familia se dice que es un *sistema proyectivo de kernels de correlación normal.*
Hay que notar que para todo $\bar{t} \in \mathbf{T}$, $b \in \mathfrak{B}_{\bar{t}}$ y $a = (b_1, \ldots, b_{n-1}, \mathbb{1})$ en $\mathfrak{B}_{\bar{t}}$ la transformación $b_n \mapsto W_{\bar{t}}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ es un funcional positivo sobre $\mathfrak{B}$ esto se obtiene por $KC2, KC4$ y $KC5$ por lo tanto es acotado.

Teorema 4.2.1. *(Teorema de reconstrucción) Sea $\mathfrak{B}$ una C^*-álgebra con identidad y sea $\{W_{\bar{t}} : \bar{t} \in \boldsymbol{T}\}$ un sistema proyectivo de kernels de correlación sobre $\mathfrak{B}$, indexado por T, entonces existe un proceso estocástico $(\mathcal{A}, \{j_t : t \in T\}, \omega)$ sobre $\mathfrak{B}$, indexado por T, teniendo a $\{W_{\bar{t}} : \bar{t} \in \boldsymbol{T}\}$ como su familia de kernels de correlación; el proceso es único modulo equivalencias. Más aun si $\mathfrak{B}$ es una W^*-álgebra y $\{W_{\bar{t}} : \bar{t} \in \boldsymbol{T}\}$ satisface KCN, entonces el proceso es un W^*-proceso.*

Demostración: Se pensará a $\mathcal{A}$ como una C^*-álgebra concreta de operadores sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, es decir, que $\mathcal{A}$ sea concreta se entenderá que existe un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y un vector cíclico, es decir si $\Omega \in \mathscr{H}$, entonces existe $i : \mathcal{A} \to B(\mathscr{H})$ un $*$-homomorfismo tal que $\overline{\{i(A)\Omega : A \in \mathcal{A}\}} = \mathscr{H}_\Omega^i = \mathscr{H}$.

Se usan $KC1, KC2$ y $KC3$ para construir a $\mathscr{H}$ y ω, para la construcción de j_t y del álgebra $\mathcal{A}$ se usan $KC4, KC5$ y $KC6$.

Primero se construye el conjunto X que contenga a todo $\mathfrak{B}_{\bar{t}}$ y un kernel positivo-definido W sobre $X \times X$.

Se define un orden parcial $\prec$ en $\mathbf{T}$, dado por $\bar{s} \prec \bar{t}$ si $n(\bar{s}) \prec n(\bar{t})$ y $\bar{s}$ se obtiene de $\bar{t}$ borrando componentes de $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n)$. Cuando $\bar{s} \prec \bar{t}$ y $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_m), \bar{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ se define $k_{\bar{s},\bar{t}}$ una función de $\{1, \ldots, m\}$ a $\{1, \ldots, n\}$ dada recursivamente por

$$
\begin{aligned}
k_{\bar{s},\bar{t}}(m) &= \max\{l : t_l = s_m\} \\
k_{\bar{s},\bar{t}}(r) &= \max\{l : l < k_{\bar{s},\bar{t}}(r+1), t_l = s_r\}, \quad r < m.
\end{aligned}
$$

y sea $f_{\bar{s}}^{\bar{t}}$ la incorporación de $\mathfrak{B}_{\bar{s}}$ en $\mathfrak{B}_{\bar{t}}$ dada por

$$
f_{\bar{s}}^{\bar{t}}(\mathbf{a}) = (b_1, \ldots, b_n),
$$

$$
b_l = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad l \neq k_{\bar{s},\bar{t}}(r) \ \text{ para todo } \ r = 1, \ldots, m \\ a_r & \text{si} \quad l = k_{\bar{s},\bar{t}}(r) \end{cases}
$$

Así la transformación $f_{\bar{t}}^{\bar{t}}$ es la identidad sobre $\mathfrak{B}_{\bar{t}}$ y $f_{\bar{t}}^{\bar{u}} \circ f_{\bar{s}}^{\bar{t}} = f_{\bar{s}}^{\bar{u}}$ cuando $\bar{s} \prec \bar{t} \prec \bar{u}$.

Sea X el límite inductivo $\lim\{\mathfrak{B}_{\overline{s}}; f_{\overline{s}}^{\overline{t}} : \overline{s} \prec \overline{t}\}$, en la categoría de conjuntos, entonces existen las transformaciones $i_{\overline{t}} : \mathfrak{B}_{\overline{t}} \to$ X tal que

$$i_{\overline{s}} \circ f_{\overline{s}}^{\overline{t}} = i_{\overline{s}} \quad \text{para todo } \overline{s} \prec \overline{t}$$

Por la condición $KC2$ se tiene que $W_{\overline{s}}(\mathbf{a};\mathbf{b}) = W_{\overline{t}}(f_{\overline{s}}^{\overline{t}}\mathbf{a}; f_{\overline{s}}^{\overline{t}}\mathbf{b})$ para todo $\overline{s} \prec \overline{t}$ y $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{B}_{\overline{s}}$, por lo tanto existe un kernel W de $X \times X$ a los complejos dado por

$$W(i_{\overline{t}}\mathbf{a}; i_{\overline{t}}\mathbf{b}) = W_{\overline{t}}(\mathbf{a};\mathbf{b}) \quad \text{para todo } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{B}_{\overline{t}}, \overline{t} \in \mathbf{T}$$

y por la condición $KC2$ se tiene que es positivo-definido.

Entonces existe un par de Gelfand $(\mathscr{H}, v)$ de W tal que $v : X \to \mathscr{H}$ dada por $\langle v(x), v(y)\rangle = W(x,y)$ para todo $x, y \in X$ y $\mathscr{H} = \vee\{v(x) : x \in X\}$.

Sea $\mathcal{D}$ el espacio lineal generado por $\{v(x) : x \in X\}$, el cual es denso en $\mathscr{H}$ y sus elementos son de la forma $v(i_{\overline{t}}(\mathbf{b}))$ para algún $\overline{t} \in \mathbf{T}$ y $\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_{\overline{t}}$. Por la condición $KC1$, el vector $V(i_{\overline{t}}(1))$ es independiente de $\overline{t} \in \mathbf{T}$; el cual denota el valor común por Ω; entonces $\langle \Omega, \Omega\rangle = 1$ por la condición $KC3$. Para todo $b \in \mathfrak{B}$ y $t \in T$, se define el operador lineal $j_t(b)$ transformando $\mathcal{D}$ en si mismo dada por $j_t(b)v(i_{\overline{s}}(\mathbf{a})) = v(i_{\overline{s},t}(\mathbf{a}, b))$, donde $\overline{s}, t = (s_1, \ldots, s_m, t)$ y $\mathbf{a}, b = (a_1, \ldots, a_m, b)$
Así se tiene que

$$v(i_{\overline{t}}(\mathbf{b})) = j_{\overline{t}}(\mathbf{b})\Omega \quad \text{para todo } \overline{t} \in \mathbf{T}, \mathbf{b} \in \mathfrak{B}_{\overline{t}}. \tag{4.2}$$

Además $j_{\overline{t}}(1)$ es la identidad de $\mathcal{D}$ esto es por la condición $KC1$.
En seguida se emplearan las condiciones $KC2, KC4$ y $KC5$ para concluir que

$$\begin{aligned} \|j_t(b)v(i_{\overline{s}}(\mathbf{a}))\|^2 &= W_{\overline{s},t}(\mathbf{a}, b; \mathbf{a}, b) \\ &\leq \|b\|^2 W_{\overline{s}}(\mathbf{a};\mathbf{a}) \\ &= \|b\|^2 \|v(i_{\overline{s}}(\mathbf{a}))\|^2 \end{aligned}$$

La primera igualdad se da puesto que

$$\begin{aligned} \|j_t(b)v(i_{\overline{s}}(\mathbf{a}))\|^2 &= \langle j_t(b)v(i_{\overline{s}}(\mathbf{a})), j_t(b)v(i_{\overline{s}}(\mathbf{a}))\rangle \\ &= \langle v(i_{\overline{s},t}(\mathbf{a}, b)), v(i_{\overline{s},t}(\mathbf{a}, b))\rangle \\ &= \omega(i_{\overline{s},t}(\mathbf{a}, b), i_{\overline{s},t}(\mathbf{a}, b)) = W_{\overline{s},t}(\mathbf{a}, b; \mathbf{a}, b). \end{aligned}$$

la siguiente desigualdad se cumple por

$$\begin{aligned}
\langle v(i_{\bar{s},t}(\mathbf{a},b)), v(i_{\bar{s},t}(\mathbf{a},b))\rangle &= \langle j_{\bar{s},t}(\mathbf{a},b))\Omega, j_{\bar{s},t}(\mathbf{a},b))\Omega\rangle \\
&= \langle \Omega, j_{\bar{s},t}(\mathbf{a},b))^* j_{\bar{s},t}(\mathbf{a},b))\Omega\rangle \\
&= \langle \Omega, j_{\bar{s},t}(\mathbf{a},1))^* b^* b j_{\bar{s},t}(\mathbf{a},1))\Omega\rangle \\
&\leq \|b\|^2 \langle \Omega, j_{\bar{s},t}(\mathbf{a},1))^* j_{\bar{s},t}(\mathbf{a},1))\Omega\rangle \\
&= \|b\|^2 \langle j_{\bar{s},t}(\mathbf{a},1))\Omega, j_{\bar{s},t}(\mathbf{a},1))\Omega\rangle \\
&= \|b\|^2 \langle j_{\bar{s},t}(\mathbf{a},1))\Omega, j_{\bar{s},t}(\mathbf{a},1))\Omega\rangle \\
&= \|b\|^2 \langle j_{\bar{s}}(\mathbf{a}))\Omega, j_{\bar{s}}(\mathbf{a}))\Omega\rangle \\
&= \|b\|^2 \langle v(i_{\bar{s}}(\mathbf{a})), v(i_{\bar{s}}(\mathbf{a}))\rangle = \|b\|^2 \|v(i_{\bar{s}}(\mathbf{a}))\|^2
\end{aligned}$$

De modo que $j_t(b)$ se puede extender, por linealidad y continuidad, a un operador lineal acotado $j_t(b)$ sobre $\mathscr{H}$ con $j_t(b) \leq \|b\|$. Utilizando las condiciones $KC, KC5, KC6$ se sigue que j_t es un $*$-representación de $\mathfrak{B}$ para cada $t \in T$.

Sea $\mathcal{A}$ un C^*-álgebra generada por $\{j_t(b) : b \in \mathfrak{B}, t \in T\}$ y sea ω el vector estado sobre $\mathcal{A}$, dado por $\omega(a) = \langle \Omega, a\Omega\rangle$ para toda $a \in \mathcal{A}$. Entonces por (4.2) se tiene que Ω es cíclico para $\mathcal{A}$ en $\mathscr{H}$ y $(\mathcal{A}, \{j_t : t \in T\}, \omega)$ es un proceso estocástico sobre $\mathfrak{B}$ que satisface

$$\omega(j_{\bar{t}}(\mathbf{a}) j_{\bar{t}}(\mathbf{b})) = W_{\bar{t}}(\mathbf{a}; \mathbf{b}) \quad \text{para todo } \bar{t} \text{ en } \mathbf{T} \text{ y } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ en } \mathfrak{B}_{\bar{t}}.$$

Por la Proposición (4.1.4) se tiene que este proceso es único modulo equivalencias. Ahora, de la construcción la condición KCN garantiza que la transformación $\pi \circ j_t$ es normal.

□

Sea $(\mathcal{A}, \{j_t\}, \omega)$ un proceso estocástico sobre $\mathfrak{B}$, indexada por T, y sea G un grupo que actúa sobre T; el proceso es *G-estacionario* si existe un grupo $\{U_g : g \in G\}$ de unitarios, es decir, $U_g U_g^* = I = U_g^* U_g$, sobre el espacio H de la representación GNS de $(\mathcal{A}, \omega)$ tal que

$$S: \quad U_g \Omega = \Omega \text{ y } U_g \pi j_t(b) = \pi j_{gt}(b) U_g.$$

para todo $g \in G$ y $b \in \mathfrak{B}$. Se define una acción de G sobre $\mathbf{T}$ por $g(t_1, \ldots, t_n) = (gt_1, \ldots, gt_n)$. A una familia $\{W_{\bar{t}} : \bar{t} \in \mathbf{T}\}$ de kernels de correlación se llama *G-invariante* si se tiene que

$$S': \quad W_{g\bar{t}}(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = W_{\bar{t}}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$$

para $g \in G$, $t \in \mathbf{T}$ y $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{B}_{\bar{t}}$.

Proposición 4.2.2. *Un proceso es G-estacionario si y sólo si su familia de kernels de correlación es G-invariante.*

Demostración: Suficiencia) La condición S' implica que el proceso $(\mathcal{A}, \{j_{\bar{t}}\}, \omega)$ y $(\mathcal{A}, \{j_{g\bar{t}}\}, \omega)$ puesto que

$$W_{g\bar{t}}(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = W_{\bar{t}}(\mathbf{a}; \mathbf{b}).$$

La existencia de los operadores unitarios que satisfacen a S es parte de la demostración de la Proposición 4.1.4.

Necesidad) Existen operadores unitarios $U_g : g \in G$ tal que la condición S se cumple. Por demostrar $W_{g\bar{t}}(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = W_{\bar{t}}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$.

$$\begin{aligned}
\omega(j_{g\bar{t}}(\mathbf{a})^* j_{g\bar{t}}(\mathbf{b})) &= \omega(j_{t_1}(a_1)^* \cdots j_{t_n}(a_n)^* j_{t_n}(b_n) \cdots j_{t_1}(b_1)) \\
&= \langle\ \Omega, \pi(j_{gt_1}(a_1)^*) \cdots \pi(j_{gt_n}(a_n)^*) \pi(j_{gt_n}(b_n)) \cdots \pi(j_{gt_1}(b_1)) \Omega \,\rangle \\
&= \langle\ \pi(j_{gt_n}(a_n)) \cdots \pi(j_{gt_1}(a_1)) \Omega\,,\ \pi(j_{gt_n}(b_n)) \cdots \pi(j_{gt_1}(b_1)) \Omega \,\rangle \\
&= \langle\ \pi(j_{gt_n}(a_n)) \cdots \pi(j_{gt_1}(a_1)) U_g \Omega\,,\ \pi(j_{gt_n}(b_n)) \cdots \pi(j_{gt_1}(b_1)) U_g \Omega \,\rangle \\
&= \langle\ U_g \pi(j_{t_n}(a_n)) \cdots \pi(j_{t_1}(a_1)) \Omega\,,\ U_g \pi(j_{t_n}(b_n)) \cdots \pi(j_{t_1}(b_1)) \Omega \,\rangle \\
&= \langle\ \pi(j_{t_n}(a_n)) \cdots \pi(j_{t_1}(a_1)) \Omega\,,\ U_g^* U_g \pi(j_{t_n}(b_n)) \cdots \pi(j_{t_1}(b_1)) \Omega \,\rangle \\
&= \langle\ \pi(j_{t_n}(a_n)) \cdots \pi(j_{t_1}(a_1)) \Omega\,,\ \pi(j_{t_n}(b_n)) \cdots \pi(j_{t_1}(b_1)) \Omega \,\rangle \\
&= \langle\ \Omega\,,\ \pi(j_{t_1}(a_1))^* \cdots \pi(j_{t_n}(a_n))^* \pi(j_{t_n}(b_n)) \cdots \pi(j_{t_1}(b_1)) \Omega \,\rangle \\
&= \omega((j_{\bar{t}}(\mathbf{a})^* j_{\bar{t}}(\mathbf{b}))).
\end{aligned}$$

□

S_n denota el grupo simétrico sobre n objetos; se define la acción de S_n en $\mathbf{T}^n$ por $\bar{t} \mapsto p\bar{t}$ donde $p(t_1, \ldots, t_n) = (t_{p(1)}, \ldots, t_{p(n)})$ y sobre $\mathfrak{B}_{\bar{t}}$ por $\mathbf{b} \mapsto p\mathbf{b}$ donde $p(b_1, \ldots, b_n) = (b_{p(1)}, \ldots, b_{p(n)})$. Una familia $W_{\bar{t}} : \bar{t} \in \mathbf{T}$ de kernels de correlación se llama *simétrica* si se tiene que $W_{p\bar{t}}(p\mathbf{a}; p\mathbf{b}) = W_{\bar{t}}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ para todo $\bar{t} \in \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{B}_{\bar{t}}$ y para todo $p \in S_{n(\bar{t})}$, tal que $p(k) < p(l)$ si $k < l$ y $t_k = t_l$; la familia se dice que es *totalmente simétrica* si cumple que para todo $p \in S_{n(\bar{t})}$, $W_{p\bar{t}}(p\mathbf{a}; p\mathbf{b}) = W_{\bar{t}}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ sin ninguna restricción.
Se dice que un proceso estocástico es *(totalmente) simétrico* si la familia de sus kernels de correlación es (totalmente) simétrica.

Conclusiones y Perspectivas

Conclusión: Hicimos una revisión no exhaustiva de la teoría de procesos estocásticos cuánticos, con énfasis en el papel que juega el Teorema de Consistencia de Kolmogorov (un resultado de probabilidad clásica).

Estudiamos un caso especial de la esperanza condicional cuántica, haciendo énfasis en propiedades similares a las de la esperanza condicional de la probabilidad clásica.

Presentamos algunos ejemplos concretos de extensión cuántica de cadenas de Markov clásicas.

Perspectivas: Estudiar propiedades de procesos estocásticos cuánticos algunos de los cuales ya están presentes en los procesos estocásticos clásicos: propiedad de Markov, estados invariantes, convergencia al equilibrio, velocidad de convergencia al equilibrio, balance detallado, equilibrio dinámico, etc.

Apéndice A

Topologías en $B(\mathscr{H})$

Se dará una breve introducción de la topologías en $B(\mathscr{H})$, basado en el libro de Fagnola [9].

A.1. Topologías de Álgebras

Definición A.1.1. Sea $(x_\alpha)_\alpha$ una red en $B(\mathscr{H})$ y sea $x \in B(\mathscr{H})$, se dice que:

1. $(x_\alpha)_\alpha$ *converge débilmente* a x si $\langle v, x_\alpha u\rangle$ converge a $\langle v, xu\rangle$ para cada $v, u \in \mathscr{H}$.
2. $(x_\alpha)_\alpha$ *converge σ-débilmente* a x si la suma $\sum_n \langle v_n, x_\alpha u_n\rangle$ converge a la suma $\sum_n \langle v_n, xu_n\rangle$, para cada par se sucesiones $(v_n)_n, (u_n)_n$ de elementos de $\mathscr{H}$ tal que las series $\sum_n \|v_n\|^2$ y $\sum_n \|u_n\|^2$ convergen.
3. $(x_\alpha)_\alpha$ *converge fuertemente* a x si $x_\alpha u$ converge a xu para cada $u \in \mathscr{H}$.
4. $(x_\alpha)_\alpha$ *converge σ-fuertemente* a x si la suma $\sum_n \|(x_\alpha - x)u_n\|^2 \to 0$ para cada sucesión $(u_n)_n$ de elementos de $\mathscr{H}$ tal que $\sum_n \|u_n\|^2$ converge.

Se puede probar que $(x_\alpha)_\alpha$ converge σ-débilmente a x si y solo si para cada operador ρ de traza finita en $\mathscr{H}$ se tiene $Tr(x_\alpha \rho) \to Tr(x\rho)$.
Los siguientes hechos serán frecuentemente usados:

a) La topología σ-débil es mas fuerte que la topología débil y no es comparable a la fuerte.

b) La topología débil y σ-débil coinciden sobre subconjuntos acotados de $B(\mathscr{H})$.

Definición A.1.2. Una álgebra de *Von Neumann* es una *-subalgebra cerrada de $B(\mathscr{H})$ que contenga unidad en la topología débil.

Proposición A.1.3. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Von Neumann de operadores actuando sobre $\mathscr{H}$, espacio de Hilbert, y sea (x_α) una red creciente en $\mathcal{A}_+$, entonces $(x_\alpha)_\alpha$ tiene supremo $x = \sup_\alpha x_\alpha$ en $\mathcal{A}_+$ y la red converge σ-fuerte a x.*

Definición A.1.4. Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de Von Neumann actuando sobre el espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y sea w un funcional lineal positivo sobre $\mathcal{A}$, se dice que w es *normal* si $\sup_\alpha w(x_\alpha) = w(\sup_\alpha x_\alpha)$.

Teorema A.1.5. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Von Neumann de operadores actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y sea w un estado sobre $\mathcal{A}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *w es normal*
2. *w es σ-débilmente continuo*
3. *Existe una matrix de densidad ρ (es decir, un operador de traza finita con $\mathbf{Tr}(\rho) = 1$) tal que:*
$$w(x) = \mathbf{tr}(\rho x).$$

Mas adelante de usará una consecuencia de la equivalencia de 1 y 2. Recordemos que un subconjunto $\mathcal{E} \subset \mathscr{H}$ es llamado total en $\mathscr{H}$ si el espacio lineal generado por $\mathcal{E}$ es denso en $\mathscr{H}$.

Proposición A.1.6. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algebras de Von Neumann, $\mathcal{B}$ actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y sea $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una transformación positiva, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es σ-débil continua (es decir, continua con respecto a las topologías σ-débil de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$).*
2. *Para cada red creciente $(x_\alpha)_\alpha$ en $\mathcal{A}_+$ con $\sup x_\alpha = x$ en $\mathcal{A}_+$. La red creciente $(Tx_\alpha)_\alpha \in \mathcal{B}_+$ converge σ-débil a Tx.*
3. *Para cada red creciente $(x_\alpha)_\alpha$ en $\mathcal{A}_+$ con $\sup x_\alpha = x$ en $\mathcal{A}_+$. Se tiene que*
$$\lim_\alpha \langle u, (Tx_\alpha)u \rangle = \sup_\alpha \langle u, (Tx_\alpha)u \rangle = \langle u, (Tx)u \rangle.$$
para cada u en un subespacio lineal de $\mathscr{H}$ el cual es denso en $\mathscr{H}$.
4. *Para cada red creciente $(x_\alpha)_\alpha$ en $\mathcal{A}_+$ con $\sup x_\alpha = x$ en $\mathcal{A}_+$. Se tiene*
$$\lim_\alpha \langle v, (Tx_\alpha)u \rangle = \langle v, (Tx)u \rangle$$
para todo v, u en un subconjunto total de $\mathscr{H}$.

Demostración: (1⇒2) De hecho satisface el hecho de que la red $(x_\alpha)_\alpha$ converge débilmente a x por la proposición 1.4.3.
(2⇒ 3) Es claro que el funcional lineal sobre $\mathcal{B}$; $y \mapsto \langle u, yu \rangle$ con $u \in \mathscr{H}$ es σ-débil continuo.

(3⇒ 4) Primero mostraremos que 3 implica que la red $(\langle u, (Tx_\alpha)u \rangle)_\alpha$ converge a $\langle u, (Tx)u \rangle$ para cada $u \in \mathscr{H}$. En efecto, para cada $\epsilon > 0$ existe u_ϵ en el subconjunto denso tal que $\|u - u_\epsilon\| < \epsilon$. La desigualdad $Tx_\alpha \leq Tx$ implica que $\|Tx_\alpha\| \leq \|Tx\|$, así se tiene

$$
\begin{aligned}
|\langle u,(Tx_\alpha)u\rangle-\langle u,(Tx)u\rangle| &= |\langle u,(Tx_\alpha)u\rangle-\langle u,(Tx)u\rangle+\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u\rangle-\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u\rangle+\\
&\quad +\langle u_\epsilon,Txu\rangle-\langle u_\epsilon,Txu\rangle+\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u_\epsilon\rangle-\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u_\epsilon\rangle\\
&\quad +\langle u_\epsilon,Txu_\epsilon\rangle-\langle u_\epsilon,Txu_\epsilon\rangle|\\
&= |\langle u,(Tx_\alpha-Tx)u\rangle+\langle u_\epsilon,Txu\rangle-\langle u_\epsilon,Tx_\alpha\rangle+\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u\rangle\\
&\quad -\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u_\epsilon\rangle+\langle u_\epsilon,Txu_\epsilon\rangle-\langle u_\epsilon,Txu\rangle+\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u_\epsilon\rangle\\
&\quad -\langle u_\epsilon,Txu_\epsilon\rangle|\\
&\leq |\langle u,(Tx_\alpha-Tx)u\rangle-\langle u_\epsilon,(Tx_\alpha-Tx)u\rangle|+|\langle u_\epsilon,Tx_\alpha(u-u_\epsilon)\rangle\\
&\quad -\langle u_\epsilon,Tx(u-u_\epsilon)\rangle|+|\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u_\epsilon\rangle-\langle u_\epsilon,Txu_\epsilon\rangle|\\
&= |\langle u-u_\epsilon,(Tx_\alpha-Tx)u\rangle|+|\langle u_\epsilon,Tx_\alpha(u-u_\epsilon)\rangle\\
&\quad -\langle u_\epsilon,Tx(u-u_\epsilon)\rangle|+|\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u_\epsilon\rangle-\langle u_\epsilon,Txu_\epsilon\rangle|\\
&= |\langle u-u_\epsilon,Tx_\alpha u\rangle-\langle u-u_\epsilon,Txu\rangle|+|\langle u_\epsilon,Tx_\alpha(u-u_\epsilon)\rangle\\
&\quad -\langle u_\epsilon,Tx(u-u_\epsilon)\rangle|+|\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u_\epsilon\rangle-\langle u_\epsilon,Txu_\epsilon\rangle|\\
&\leq |\langle u-u_\epsilon,Tx_\alpha u\rangle|+|\langle u-u_\epsilon,Txu\rangle|+|\langle u_\epsilon,Tx_\alpha(u-u_\epsilon)\rangle|\\
&\quad +|\langle u_\epsilon,Tx(u-u_\epsilon)\rangle|+|\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u_\epsilon\rangle-\langle u_\epsilon,Txu_\epsilon\rangle|\\
&\leq \|u-u_\epsilon\|\|Tx_\alpha u\|+\|u-u_\epsilon\|\|Txu\|+\|u_\epsilon\|\|Tx_\alpha(u-u_\epsilon)\|\\
&\quad +\|u_\epsilon\|\|Tx\|\|u-u_\epsilon\|+|\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u_\epsilon\rangle-\langle u_\epsilon,Txu_\epsilon\rangle|\\
&= \|u-u_\epsilon\|(\|Tx_\alpha\|\|u\|+\|Tx\|\|u\|+\|Tx_\alpha\|\|u_\epsilon\|+\|Tx\|\|u_\epsilon\|)\\
&\quad +|\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u_\epsilon\rangle-\langle u_\epsilon,Txu_\epsilon\rangle|\\
&= \|u-u_\epsilon\|(\|Tx_\alpha\|+\|Tx\|)(\|u\|+\|u_\epsilon\|)+|\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u_\epsilon\rangle\\
&\quad -\langle u_\epsilon,Txu_\epsilon\rangle|\\
&\leq 2\epsilon\|Tx\|(\|u\|+\|u_\epsilon\|)+|\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u_\epsilon\rangle-\langle u_\epsilon,Txu_\epsilon\rangle|\\
&\leq 2\epsilon\|Tx\|(2\|u\|+\epsilon)+|\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u_\epsilon\rangle-\langle u_\epsilon,Txu_\epsilon\rangle|
\end{aligned}
$$

Por lo que que tenemos:

$$|\langle u,(Tx_\alpha)u\rangle-\langle u,(Tx)u\rangle|\leq 2\epsilon\|Tx\|(2\|u\|+\epsilon)+|\langle u_\epsilon,Tx_\alpha u_\epsilon\rangle-\langle u_\epsilon,Txu_\epsilon\rangle|.$$

Por lo tanto se tiene que $\lim_\alpha|\langle u,(Tx_\alpha)u\rangle-\langle u,(Tx)u\rangle|\leq 2\epsilon\|Tx\|(2\|u\|+\epsilon)$.
Entonces por la identidad de polarización

$$\langle v,(Tx_\alpha u)\rangle=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}i^k\langle v+i^ku,(Tx_\alpha)(v+i^ku)\rangle.$$

se obtiene que $\lim_\alpha\langle u,(Tx_\alpha)u\rangle=\langle u,(Tx)u\rangle$ para cada $v,u\in\mathscr{H}$.

(4 ⇒ 3). En efecto 4) implica que $\text{lím}\langle v,(Tx_\alpha)u\rangle = \langle v,(Tx)u\rangle$, con v, u en el subconjunto denso de $\mathscr{H}$ lineal generado por el conjunto total. Este generado lineal es claramente denso.

(3 ⇒ 2). Sean $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ dos sucesiones de vectores en $\mathscr{H}$ tal que las sucesiones $(\|u_n\|)_{n\geq 0}, (\|v_n\|)_{n\geq 0}$ son cuadrado sumables. Lo que se pretende demostrar es:

$$\text{lím}_\alpha \sum_{n\geq 0}\langle v_n,(Tx_\alpha u_n)\rangle = \sum_\alpha \langle v_n,(Tx)u_n\rangle$$

esto se cumple, para cada $\epsilon > 0$, al tomar un entero N tal que

$$\sum_{n\geq N}\|u_n\|^2 < \epsilon \ , \quad \sum_{n\geq N}\|v_n\|^2 < \epsilon$$

Entonces:

$$\left|\sum_{n\geq 0}\langle v_n,(Tx_\alpha)u_n\rangle - \sum_{n\geq 0}\langle v_n,(Tx)u_n\rangle\right| = \left|\sum_{n\geq 0}\langle v_n,(Tx_\alpha - Tx)u_n\rangle\right|$$

$$\leq \sum_{n\geq N}|\langle v_n,(Tx_\alpha - Tx)u_n\rangle| + \left|\sum_{n=0}^{N}\langle v_n, Tx_\alpha u_n\rangle - \sum_{n=0}^{N}\langle v_n, Txu_n\rangle\right|$$

$$\leq \sum_{n\geq N}\|v_n\|\|Tx_\alpha - Tx\|\|u_n\| + \left|\sum_{n=0}^{N}\langle v_n, Tx_\alpha u_n\rangle - \sum_{n=0}^{N}\langle v_n, Txu_n\rangle\right|$$

$$\leq (\|Tx_\alpha\| + \|Tx\|)\sum_{n\geq N}\|v_n\|\|u_n\| + \left|\sum_{n=0}^{N}\langle v_n, Tx_\alpha u_n\rangle - \sum_{n=0}^{N}\langle v_n, Txu_n\rangle\right|$$

$$\leq 2\|Tx\|\sum_{n\geq N}\|u_n\|\|v_n\| + \left|\sum_{n=0}^{N}\langle v_n, Tx_\alpha u_n\rangle - \sum_{n=0}^{N}\langle v_n, Txu_n\rangle\right|$$

$$\leq 2\|Tx\|(\sum_{n\geq N}\|v_n\|^2 + \sum_{n\geq N}\|u_n\|^2) + \left|\sum_{n=0}^{N}\langle v_n, Tx_\alpha u_n\rangle - \sum_{n=0}^{N}\langle v_n, Txu_n\rangle\right|$$

$$\leq 2\|Tx\|\epsilon + \left|\sum_{n=0}^{N}\langle v_n, Tx_\alpha u_n\rangle - \sum_{n=0}^{N}\langle v_n, Txu_n\rangle\right|$$

el segundo termino tiende a cero, como se probo en el inciso anterior que la red $(\langle v,(Tx_\alpha)u\rangle)_\alpha$ converge a $\langle v,(Tx)u\rangle$ para cada $u, v \in \mathscr{H}$, se tine que

$$\text{lím}_\alpha \left|\sum_{n\geq 0}\langle v_n,(Tx_\alpha)u_n\rangle - \sum_{n\geq 0}\langle v_n,(Tx)u_n\rangle\right| \leq 2\epsilon\|Tx\|.$$

Como ϵ es arbitrario, por lo tanto se tiene lo que se queria pobrar.

($2 \Rightarrow 1$)Sea $(x_\alpha)_\alpha$ una red en $\mathcal{A}$ que converge σ-fuerte a x. Para todo par $(v_n)_{n\geq 0}, (u_n)_{n\geq 0}$ de sucesiones de vectores en $\mathscr{H}$, tal que $(\|u_n\|)_{n\geq 0}(\|v_n\|)_{n\geq 0}$ son cuadrado sumables sea ω un funcional σ-fuerte continuo sobre $\mathcal{B}$.

$$\omega(y) = \sum_{n\geq 0} \langle v_n, yu_n \rangle.$$

Por la identidad de polarización compleja ω se puede escribir como la combinación lineal de cuatro funcionales positivos $\omega_k,\ \ k = 0, 1, 2, 3$ tal que

$$\omega_k(y) = \sum_{n\geq 0} \langle (v + i^k u), y(v + i^k u) \rangle.$$

Por lo tanto para probar que $2 \Rightarrow 1$ basta probar que la red $(\omega(Tx_\alpha))_\alpha$ converge a $\omega(Tx)$ para todo funcional lineal positivo ω de la forma de arriba.
Si para un ω tenemos que $\omega(T\mathbb{1}) = 0$ entonces $\omega(Tx) = 0$ para cada elemento auto-adjunto $x \in \mathcal{A}$ por que $-\|x\|\mathbb{1} \leq x \leq \|x\|\mathbb{1}$ puesto que

$$|\langle u, xu \rangle| \leq \|u\|\|xu\| \leq \|x\|\|u\|^2$$

$$= \|x\|\langle u, u \rangle = \langle u, \|x\|u \rangle.$$

y T es positivo y por lo tanto

$$\omega(Tx) = \frac{\omega(T(x + x^*))}{2} + \frac{i\omega(\frac{T(x-x)^*}{i})}{2} = 0$$

para cada $x \in \mathcal{A}$. Por lo tanto no hay nada que probar.
Si $\omega(T\mathbb{1}) > 0$, entonces sea

$$\widetilde{\omega}(y) = \frac{\omega(Ty)}{\omega(T\mathbb{1})}$$

Así $\widetilde{\omega}$ es un estado sobre $\mathcal{A}$. El inciso 2) garantiza que $\widetilde{\omega}$ es normal. Entonces por el teorema 1.4.5 tenemos que $\widetilde{\omega}$ es σ-debil continuo así que

$$\lim_{\alpha} \omega(Tx_\alpha) = \lim_{\alpha} \omega(T\mathbb{1})\widetilde{\omega}(Tx_\alpha) = \omega(T\mathbb{1})\widetilde{\omega}(Tx) = \omega(Tx)$$

$\square$

Bibliografía

[1] L. Accardi. Quantum probability: New perspectives for the laws of chance. *Milan Journal of Mathematics*, 78.:481–502, 2010.

[2] L. Accardi and C. Cecchini. Contional expectations in von neumann algebras and a theorem of takesaki. *J. Funct. Anal.*, 45.:245–273, 1982.

[3] L. Accardi, J.T.Lewis, and A. Frigerio. Quantum stochastic processes. *Publ.RIMS. Kyoto Univ.*, 18.:97–133, 1982.

[4] W. Arveson. *An Invitation to C*-Algebras (Graduate Texts in Mathematics Vol. 39)*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.

[5] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I: C* and W* - Algebras, Symmetry Groups, Decomposition of States*. Springer-Verlag, 1979.

[6] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics (International Series of Monographs on Physics)*. Oxford University Press, USA, 1982.

[7] J. Dixmier. *Von Neumann Algebras (North-Holland Mathematical Library)*. Elsevier Science Ltd, 1981.

[8] J. L. Doob. *Stochastic Processes (Wiley Classics Library)*. Wiley-Interscience, 1990.

[9] F. Fagnola. *Quantum Markov Semigroups and Quantum Flows,*, volume 18 of *Proyecciones (Revista de Matemática),*. 1999.

[10] S. H. Friedberg, A. J. Insel, and L. E. Spence. *Linear Algebra (4th Edition)*. Prentice Hall, 2002.

[11] P. G. Hoel, S. C. Port, and C. J. Stone. *Introduction to Stochastic Processes*. Waveland Press, 1986.

[12] K.R. Parthasarathy. *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus (Monographs in Mathematics)*. Birkhäuser Basel, 1992.

[13] R. Rebolledo. Conversando el sexto problema de hilbert. Disponible en `http://www.mat.puc.cl/ rrebolle/Cvirtual/Cvirtual.html`.

[14] M. Reed and B. Simon. *I: Functional Analysis, Volume 1 (Methods of Modern Mathematical Physics)*. Academic Press, 1981.

[15] V.S. Sunder. *An Invitation to von Neumann Algebras (Universitext)*. Springer, 1986.

[16] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras I (Operator Algebras and Non-Commulative Geometry V)*. Springer, 2001.

[17] D. Tse and P. Viswanath. *Fundamentals of Wireless Communication*. Cambridge University Press, 2005.

[18] C. Tudor. *Procesos estocásticos*, volume Nivel Avanzado of *Textos*. S.M.M., 3a. edition, 2002.

[19] J. Weidmann. *Linear Operators in Hilbert Spaces (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1980.

[20] H. Weyl. *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. 1981.